
TD 7 bis : A chercher pour lundi rentrée

On reconditionne les deux derniers exercices du TD7 pour que vous les abordiez en autonomie en proposant une autre approche pour le 69.

Exercice 68

Soient $A \in M_n(\mathbb{C}) = E$ ainsi que u et v les endomorphismes de E définis par $u(M) = AM$ et $v(M) = MA$, ce pour tout $M \in E$.

Il s'agit de comparer les éléments propres de u , v et de A .

1) **Comparaison des spectres :**

a) Soient $\lambda \in Sp(u)$ et $M \in E$ un vecteur propre associé.

On note $C_1(M), \dots, C_n(M)$ les colonnes (identifiées à des éléments de $M_{n,1}(\mathbb{C})$) de M .

Vérifier que $AC_i(M) = \lambda C_i(M)$. En déduire que le spectre de u est inclus dans celui de A .

b) Soit $\mu \in Sp(A)$ et X une colonne propre associée.

On définit $M \in E$ de sorte que sa première colonne soit X et les autres nulles.

Etablir que $\mu \in Sp(u)$ en calculant $u(M)$.

c) Conclure et traiter le même problème pour v avec le plus de concision possible? (Penser à transposer)

2) Comparer les espaces propres de u et de A est terminologiquement approximatif puisque ces sous-espaces vectoriels ne sont pas de même nature (y réfléchir).

Il s'agit plutôt de trouver un lien entre ces deux espaces propres.

Soient $\lambda \in Sp(A)$ et $(X_1, \dots, X_s)$ une base de $E_\lambda(A)$. On pose, pour $(i, j) \in \llbracket 1, s \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket$, E_{ij} l'élément de E dont la i -ième colonne est X_j et les autres sont nulles.

En se référant à 1)a) et 1)b), prouver que $E_\lambda(u) = Vect(E_{ij}, (i, j) \in \llbracket 1, s \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket)$.

3) En déduire que A est diagonalisable si et seulement si u l'est.

4) Traiter sommairement le problème pour v .

Exercice 69

Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie et $f \in L(E)$ de rang 1.

1) Montrer qu'il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $(e_2, \dots, e_n)$ soit une base de $Ker(f)$. 2) Etablir l'existence d'un réel a et de $u \in Ker(f)$ tel que $f(e_1) = ae_1 + u$.

3) Vérifier que si $u = 0_E$ alors $a \neq 0$ et f est diagonalisable.

On suppose désormais $u = u_2 \neq 0_E$.

4) Prouver qu'il existe une famille $u_3, \dots, u_n$ libre de E de sorte que $b = (e_1, u_2, \dots, u_n)$ soit une base de E . Déterminer A la matrice de f dans la base b .

5) On suppose $a = 0$, établir que A est nilpotente et non diagonalisable.

6) On suppose $a \neq 0$, préciser la matrice dans la base $(f(e_1), u_2, \dots, u_n)$.

Faire une synthèse et répondre à la question posée dans le TD7.