TP n° 5 : examen pratique

Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre que vous voulez, ils ne sont pas ordonnés par ordre de difficulté.

En fin d'épreuve, vous devrez avoir créé un fichier de code Python qui s'appellera `votrenomdefamille.py` où votre nom de famille sera écrit en lettres minuscules, sans accents, sans cédille, sans espaces.

Puis vous vous identifierez sur prepabellevue.org, vous afficherez l'article 1018 intitulé « Epreuve pratique d'informatique »(`http://prepabellevue.org/index.php?article=1018`) de la rubrique MPSI / Informatique et vous enverrez votre fichier en utilisant le formulaire en ligne.

En cas de problème d'envoi, signalez-le tout de suite ! Et n'attendez pas la dernière minute pour le faire !

On rappelle les fonctions Python suivantes :

— **`str`**`(x)` transforme un objet `x` en une chaîne de caractères
— **`int`**`(x)` transforme un objet `x` en un entier si cela a un sens
— **`list`**`(x)` transforme un objet `x` parcourable en une liste si cela a un sens

Les symboles `n,k,p` désignent toujours des entiers, `L,M` des listes d'entiers naturels.

I

Écrivez une fonction `recherche(n)` qui donne la liste des entiers $p \geqslant 2$ tels que $p \leqslant n$ et $2^{p-1} - 1$ soit divisible par p^2.

Cette fonction sera testée avec des valeurs de n au moins égales à 2000.

II

Un entier p est appelé un carré quand il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $p = n^2$. Un entier p est appelé un triangle quand il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $p = \frac{n(n+1)}{2}$.

On recherche les nombres qui sont à la fois des carrés et des triangles, comme 36, par exemple ($36 = 6^2 = \frac{8\times 9}{2}$).

— Écrivez une fonction `carres(n)` qui calcule la liste des carrés inférieurs ou égaux à n.
— Écrivez une fonction `inter(L,M)` qui calcule la liste des éléments communs aux deux listes `L` et `M` (on supposera que les listes ne contiennent pas deux fois le même élément).
— Écrivez une fonction `carrestriangles(n)` qui donne la liste des entiers inférieurs ou égaux à n qui sont en même temps des carrés et des triangles.

III

— Le retourné d'un nombre entier n est le nombre dont les chiffres sont ceux de n lus dans le sens droite-gauche : par exemple, le retourné de 2146 est 6412, celui de 410 est $14 = 014$.
Écrivez une fonction `retourne(n)` qui calcule l'entier retourné de l'entier n.
— Un nombre entier est appelé un nombre palindrome quand il est égal à son retourné : 156651 est un nombre palindrome.
Écrivez une fonction `palindromes(n)` qui calcule la liste des palindromes inférieurs ou égaux à n.
Par exemple, `palindromes(15)= [0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,11]`.
— Écrivez une fonction `paldiv(n,p)` qui calcule la liste des palindromes inférieurs ou égaux à n divisibles par p.
Par exemple, `paldiv(1000,47)= [0,141,282]`.

IV

Dans cet exercice, on considère des listes d'entiers de signes quelconques.

Écrivez une fonction `pgs(L)` de paramètre une liste `L` et qui renvoie une liste à deux éléments `[M, s]`, où `M` est une sous-liste de `L` de somme `s` maximale parmi les sommes de toutes les sous-listes de `L` (rappel : une sous-liste de `L` est constituée d'éléments consécutifs de `L`).

Par exemple,
`pgs([4, -5, 7, 1, -6, 8, -2, 6, -12, 9, -1, 2])= [[7, 1, -6, 8, -2, 6], 14].`

V

Dans cet exercice, on considère des listes de 0 et de 1 exclusivement. Si L est une telle liste, on définit $f(L)$:

si L est de longueur n, alors $f(L)$ est la liste M de même longueur telle que

— pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$, $M[i] = |L[i+1] - L[i]|$
— $M[n-1] = |L[0] - L[n-1]|$

Comme souvent en mathématiques, on note f^k la composée de f par elle-même k fois, avec la convention $f^0 = Id$.
On peut montrer par un simple argument de cardinalité que pour toute liste L constituée de 0 ou 1, la suite des listes $(f^m(L))_{m\in\mathbb{N}}$ finit par boucler après une période transitoire.
On appelle (k, p) les plus petits entiers tels que $k \geqslant 0$, $p > 0$ et $f^{k+p}(L) = f^k(L)$. D'une manière imagée, k est le rang à partir duquel la suite $(f^m(L))_{m\in\mathbb{N}}$ commence à boucler et p est la longueur de la boucle.

Dans les exemples ci-dessous, on note `L` → `M` quand `M = f(L)`.

— `[1,1,1]` → `[0,0,0]` → `[0,0,0]`
à partir du rang 1, la liste ne varie plus, donc $k = 1$ et $p = 1$.
— `[1,1,0]` → `[0,1,1]` → `[1,0,1]` → `[1,1,0]`
on est revenu à la liste de départ, donc $k = 0$ et $p = 3$
— `[1,1,0,1]` → `[0,1,1,0]` → `[1,0,1,0]` → `[1,1,1,1]` → `[0,0,0,0]` → `[0,0,0,0]`
$k = 4$ et $p = 1$
— `[1,1,0,0,1,0]` → `[0,1,0,1,1,1]` → `[1,1,1,0,0,1]` → `[0,0,1,0,1,0]` → `[0,1,1,1,1,0]` → `[1,0,0,0,1,0]` → `[1,0,0,1,1,1]` → `[1,0,1,0,0,0]` → `[1,1,1,0,0,1]`
on retombe sur la liste numéro 2 après 6 itérations donc $k = 2$ et $p = 6$

Maintenant on code tout ça en Python.

— Écrivez une fonction `liste(n)` qui renvoie la liste de longueur n `[1,0,0,...,0,1]` ($n \geqslant 2$ bien sûr), constituée de $n-2$ zéros intercalés entre 2 uns.
Par exemple, `liste(6)= [1,0,0,0,0,1]`.
— En python, la fonction valeur absolue est notée **`abs`**`(x)`. Écrivez une fonction `f(L)` qui calcule $f(L)$.
— Écrivez une fonction `position(x,Liste)` qui renvoie soit le plus petit indice `i` tel que `Liste[i] = x` si `x` est dans la liste `Liste`, soit `-1` si `x` n'y est pas.
— Écrivez une fonction `entiers(L)` qui calcule la liste à deux éléments `[k,p]`, qui donne le rang de la liste suivi de sa période.
— Écrivez une fonction `maxper(n)` qui calcule la plus grande des périodes des listes `liste(i)` pour `i` variant de 3 à n. Par exemple, `maxper(10)= 63`.
Conseil : si vous testez votre fonction, ne la testez pas avec des entiers trop grands (ne dépassez pas 25), sinon le temps de calcul est prohibitif.