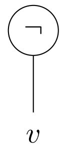
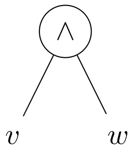
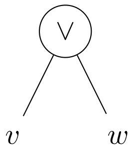
CALCUL PROPOSITIONNEL 2

1 Représentation arborescente des formules logiques

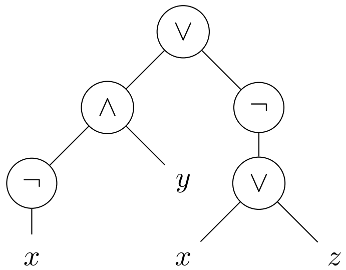
On représente les variables par elles-mêmes, ainsi que $\top$ et $\bot$, puis par induction structurelle, on définit les représentations des formules :

— si $u = (\neg v)$, on la représente par 

— si $u = (v \wedge w)$, on la représente par 

— si $u = (v \vee w)$, on la représente par 

Exemple. Soit x, y, z 3 variables, la formule $f = ((\neg x) \wedge y) \vee (\neg(x \vee z))$ est représentée par l'arbre



La hauteur (ou profondeur) d'une formule est la longueur du plus grand chemin reliant la racine à une feuille (sur l'exemple, la profondeur est 3).

Autrement dit, on définit un type formule :

```
type formule = | Vrai | Faux
               | Var of string
               | Neg of formule
               | Ou of formule * formule
               | Et of formule * formule;;

let f = Ou(
  Et(
    Non(Var("x")),
    Var("y")
  ),
  Non(
    Ou(
      Var("x"),
      Var("z")
    )
  )
);;
```

2 Problème de la satisfiabilité d'une formule

Pour savoir si une formule est satisfiable ou non, une méthode est de dresser sa table de vérité et d'observer si la dernière colonne contient un 1 ou pas. A l'heure actuelle, on n'a pas trouvé d'algorithme autre que la recherche systématique d'une bonne assignation pour répondre à la question de la satisfiabilité d'une formule quelconque. Malheureusement cet algorithme est de complexité exponentielle en fonction du nombre de variables de la formule. De plus, il a été montré que ce problème de satisfiabilité est NP-complet.

En revanche, sur certains types de formules, on peut espérer faire mieux.

2.1 Formes disjonctives ou conjonctives

Définition. On appelle littéral toute variable (littéral positif) ou toute négation de variable (littéral négatif).

Proposition 1

Toute formule est équivalente (au choix)

- *à une disjonction de conjonctions de littéraux (forme disjonctive),*
- *à une conjonction de disjonctions de littéraux (forme conjonctive),*

les formules équivalentes ayant moins de variables que la formule initiale.

Remarque. Il n'y a pas unicité d'une telle forme, puisqu'on peut ajouter des variables inutiles (qui ferait ça ?).

On peut espérer obtenir de telles formes par calcul propositionnel en utilisant entre autres les règles de calcul indiquées dans le chapitre précédent.

Exemple. Soit $f = (p \vee \neg r) \Rightarrow (r \vee (\neg p \wedge q))$. Alors

$$\begin{aligned} f &\equiv \neg(p \vee \neg r) \vee (r \vee (\neg p \wedge q)) \\ &\equiv (\neg p \wedge r) \vee r \vee (\neg p \wedge q) \end{aligned}$$

ce qui est une forme disjonctive.

$$\begin{aligned} f &\equiv \neg(p \vee \neg r) \vee (r \vee (\neg p \wedge q)) \\ &\equiv (\neg p \wedge r) \vee (r \vee (\neg p \wedge q)) \\ &\equiv ((\neg p \wedge r) \vee r) \vee (\neg p \wedge q) \\ &\equiv r \vee (\neg p \wedge q) \\ &\equiv (r \vee \neg p) \wedge (r \vee q) \end{aligned}$$

ce qui est une forme conjonctive.

2.2 Formes normales disjonctives ou conjonctives

On peut faire apparaître l'unicité à condition de mettre en jeu toutes les variables de f.

Proposition 2

Toute formule f de variables $x_1, \ldots, x_n$ est équivalente (au choix)

- *à une disjonction de conjonctions de littéraux dans lesquels apparaissent une et une seule fois chaque variable (forme normale disjonctive),*
- *à une conjonction de disjonctions de littéraux dans lesquels apparaissent une et une seule fois chaque variable (forme normale conjonctive).*

De plus, ces deux formes sont uniques (à l'ordre des facteurs près).

(démonstration en appendice)

Exemple. Soit $f = (p \vee \neg r) \Rightarrow (r \vee (\neg p \wedge q))$. Alors

$$\begin{aligned} f &\equiv r \vee (\neg p \wedge q) \\ &\equiv (r \wedge (p \vee \neg p)) \vee (\neg p \wedge q \wedge (r \vee \neg r)) \\ &\equiv (r \wedge p) \vee (r \wedge \neg p) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \\ &\equiv (r \wedge p \wedge q) \vee (r \wedge p \wedge \neg q) \vee (r \wedge \neg p \wedge q) \vee (r \wedge \neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \\ &\equiv (r \wedge p \wedge q) \vee (r \wedge p \wedge \neg q) \vee (r \wedge \neg p \wedge q) \vee (r \wedge \neg p \wedge \neg q) \vee (\neg r \wedge \neg p \wedge q) \end{aligned}$$

ce qui est la forme normale disjonctive.

En faisant le même genre de calculs, on obtient la forme normale conjonctive :
$f \equiv (r \vee \neg p \vee q) \wedge (r \vee \neg p \vee \neg q) \wedge (r \vee p \vee q)$.

On peut aussi obtenir la forme normale disjonctive en étudiant la table de vérité de la formule : chaque ligne qui donne 1 correspond à une conjonction.

Exemple.

Soit f la formule de variables x_1, x_2, x_3 dont la table de vérité est ci-dessous :

x_1	x_2	x_3	f	
0	0	0	0	
0	0	1	1	$\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3$
0	1	0	0	
0	1	1	1	$\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$
1	0	0	1	$x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3$
1	0	1	0	
1	1	0	1	$x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3$
1	1	1	0	

Alors $f \equiv (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3)$.

Preuves

Preuve de la proposition 2

Toute formule f de variables $x_1, \ldots, x_n$ est équivalente à une disjonction de conjonctions de littéraux dans lesquels apparaissent une et une seule fois chaque variable (forme normale disjonctive),

Démonstration. Un premier cas simple : si f est une contradiction, alors $f \equiv \perp$ (forme normale disjonctive à 0 terme).

On suppose maintenant que f n'est pas une contradiction. On donne d'abord quelques définitions (rappel : $\mathscr{B}$ est l'ensemble des booléens).

Pour $b \in \mathscr{B}$ et $x \in \mathscr{V}$, on pose $x^b = x$ si $b = 1$ et $x^b = (\neg x)$ si $b = 0$: x^b est donc un littéral.

Pour $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathscr{B}^n$, on pose $X^{(b_1,\ldots,b_n)} = x_1^{b_1} \wedge \ldots \wedge x_n^{b_n} = \displaystyle\bigwedge_{i=1}^{n} x_i^{b_i}$

et $v_{b_1,\ldots,b_n}$ la valuation telle que $v(x_i) = b_i$.

On vérifie aisément que $\mathrm{Val}(X^{(b_1,\ldots,b_n)}, v_{c_1,\ldots,c_n}) = 1$ si et seulement si $(b_1, \ldots, b_n) = (c_1, \ldots, c_n)$, car une conjonction n'est vraie que si tous ses littéraux sont vrais, et $\mathrm{Val}(x^b, v) = 1$ si et seulement si $v(x) = b$.

On note $\mathbb{U}_f = \{(b_1, \ldots, b_n) \in \mathscr{B}^n / \mathrm{Val}(f, v_{b_1,\ldots,b_n}) = 1\}$: en clair, c'est l'ensemble des lignes de la table de vérité qui donne la valeur 1 à f

Enfin, on pose $g = \displaystyle\bigvee_{(b_1,\ldots,b_n)\in\mathbb{U}_f} X^{(b_1,\ldots,b_n)}$: g est la formule obtenue en « disjonctant »les différentes lignes de la table qui donnent la valeur 1 à f et exactement celles-là.

g est une forme normale disjonctive et g a donc la même table de vérité que f, donc $f \equiv g$. •