GRAPHES : CHEMINS, CONNEXITÉ

Définir une matrice en CAML se fait à l'aide de la fonction `make_matrix n p x`, l'accès à une case par `m.(i).(j)`.
On définit trois types pour représenter les graphes d'ordre n (dont les sommets sont numérotés par des entiers de 0 à $n-1$) :
- par matrice d'adjacence (MA) : `type ma == int vect vect`
- par tableau de listes d'adjacence (TLA) : `type tla = int list vect`
- par liste de listes d'adjacence (LLA) : `type lla = (int * int list) list`

1) Chemins et chemins élémentaires

a) Écrivez une fonction qui teste si une liste de sommets est un chemin dans un graphe, selon le type choisi pour le graphe.

b) Écrivez une fonction qui teste si une liste de sommets est un chemin élémentaire.

c) Écrivez une fonction qui extrait d'un chemin un chemin élémentaire.

2) Existence de cycles

a) Justifiez que si dans un graphe orienté, tous les sommets ont au moins un prédécesseur, alors le graphe possède un cycle.

b) Écrivez une fonction qui recherche un sommet sans prédécesseur dans un graphe : s'il en existe, elle en donne un dans une liste (à un élément), sinon elle retourne la liste vide.

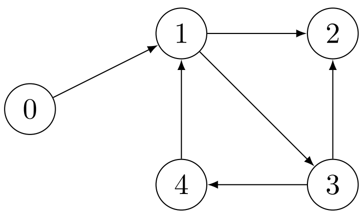
c) Écrivez une fonction qui supprime un sommet sans prédécesseur et les arcs associés dans un graphe : vous choisirez une représentation des sommets présents ou non dans un graphe, adaptée à la représentation choisie pour le graphe.

d) Écrivez un algorithme qui détermine si un graphe possède un cycle.

e) Écrivez dans un premier temps une fonction qui détermine un cycle quelconque dans un graphe qui en possède, un cycle élémentaire dans un second temps.

3) Puissances d'un graphe Soit $G = (S, A_1)$ un graphe. On appelle carré du graphe G le graphe $G^2 = (S, A_2)$ défini de la façon suivante :
si $i \neq j$, (i, j) est un arc de A_2 si et seulement si il existe $k \in S$ tel que (i, k) et (k, j) soient deux arcs de A_1.
Autrement dit, G^2 est le graphe des chemins de longueur 2 dans le graphe G.

a) Soit G le graphe représenté par le schéma suivant



représentez graphiquement le graphe G^2.

b) Si G est représenté par le type MA, sa matrice étant M_1, que valent les coefficients de la matrice M^2 ? Comment calculer la représentation M_2 de G^2 ?

c) Si G est représenté par le type TLA, écrivez une fonction qui calcule la représentation de G^2.

Plus généralement, on définit par récurrence le graphe $G^p = (S, A_p)$:
si $i \neq j$, (i, j) est un arc de A_{p+1} si et seulement si il existe $k \in S$ tel que (i, k) soit un arc de A_p et (k, j) un arc de A_1.

a) Comment calculer la matrice M_p de G^p ?

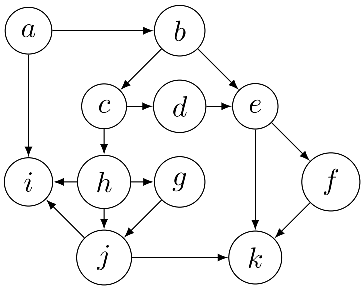
b) On pose $\overline{M} = \sum_{p=1}^{n} M_p$. Comment lire sur la matrice $\overline{M}$ la connexité ou non de G ? Est-ce une bonne méthode pour déterminer si un graphe est connexe ou non ?

4) Numérotation topologique d'un graphe orienté Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté d'ordre n. On appelle numérotation topologique sur G toute application de S dans $\{1, \ldots, n\}$ telle que pour tout arc (i, j), $f(i) < f(j)$.

a) Montrez que si G possède une numérotation topologique, alors G est acyclique (*i.e.* ne possède pas de cycle.

b) On veut montrer la réciproque. Soit G un graphe acyclique. On reprend l'algorithme évoqué dans l'exercice 2 (dit « algorithme de Marimont »). A l'étape k de cet algorithme, on appelle E l'ensemble des sommets sans prédécesseur : il est non vide et on pose alors pour tout $x \in E$, $f(x) = k$.
Montrez que f est une numérotation topologique de G.

c) Sur l'exemple suivant, où les sommets sont numérotés par des lettres, donnez une numérotation topologique.



5) Numérotation conforme Soit G un graphe orienté. On appelle numérotation conforme toute numérotation topologique injective. D'après l'exercice précédent, si G possède une numérotation conforme, alors il est acyclique.

a) Modifiez l'algorithme précédent pour montrer la réciproque.

b) Montrez que l'ordre de sortie de la pile dans un parcours en profondeur légèrement modifié pour que chaque étape commence par un sommet sans prédécesseur permet aussi d'expliciter une numérotation conforme d'un graphe acyclique.

6) Parcours en profondeur récursif Donnez une version récursive du parcours en profondeur d'un graphe.

Avec le type TLA, écrivez la fonction récursive correspondante.

7) Arbres couvrants

Écrivez une fonction qui calcule un arbre couvrant correspondant à un parcours en profondeur. Faites de même avec un parcours en largeur.