

## LOGIQUE

1) Soit  $x, y, z$  trois variables propositionnelles. Montrez que les formules suivantes sont des tautologies :

- a)  $(x \wedge (x \Rightarrow y)) \Rightarrow y$
- b)  $(x \wedge (y \Rightarrow \neg x)) \Rightarrow \neg y$
- c)  $(x \Rightarrow y \wedge x \Rightarrow \neg y) \Rightarrow \neg p$
- d)  $x \Rightarrow (y \Rightarrow x)$
- e)  $(x \Rightarrow (y \Rightarrow z)) \Rightarrow ((x \Rightarrow y) \Rightarrow (x \Rightarrow z))$

2) Soit  $p, q, r, \dots$  des variables propositionnelles. Les formules suivantes sont-elles satisfiables ?

- a)  $((p \Rightarrow q) \wedge q) \Rightarrow a$
- b)  $(p \wedge q) \wedge (q \Leftrightarrow r) \Rightarrow (p \wedge r)$

3) On appelle connecteur de Scheffer le connecteur noté  $|$  défini par :  $x|y \equiv \neg x \vee \neg y$ .

- a) Donnez la table de vérité du connecteur de Scheffer. Que peut-on dire de la formule  $x|x$  ?
- b) Montrez qu'il existe une formule contenant exactement 3 connecteurs de Scheffer équivalente à  $x \vee y$ .
- c) Donnez une formule ne contenant que des connecteurs de Scheffer équivalente à  $x \wedge y$ , à  $x \Rightarrow y$  et  $x \Leftrightarrow y$ .
- d) Montrez que toute formule  $f$  est équivalente à une formule  $f^*$  ayant les mêmes variables et construites uniquement avec des connecteurs de Scheffer. Appliquez ce résultat à la formule  $x \wedge (y \vee z)$ .

4) McGregor, commerçant londonien, appelle Scotland Yard pour signaler que sa boutique vient d'être cambriolée. Après enquête, la police a établi les faits suivants :

- A. il y a trois suspects : a, b et c. Chacun est entré dans la boutique le jour du vol et personne d'autre ne peut être coupable ;
- B. si a est coupable, alors il a un seul complice ;
- C. si b est innocent, alors c l'est aussi ;
- D. s'il y a exactement deux coupables, alors a est l'un d'entre eux ;
- E. si c est innocent, alors b l'est aussi.

Pour établir la culpabilité ou l'innocence des suspects, représentez le problème par un ensemble de formules. Cet ensemble de formules est-il consistant ? (*i.e.* la conjonction de ces formules est-elle satisfiable ?) Si oui, qui faut-il inculper ?

5) Brown, Jones et Smith sont prévenus de fraude fiscale. Ils prêtent serment de la manière suivante :

BROWN : Jones est coupable et Smith est innocent.

JONES : si Brown est coupable, alors Smith aussi

SMITH : je suis innocent mais au moins l'un des deux autres est coupable.

Soit B, J, S les énoncés : « Brown est innocent », « Jones est innocent », « Smith est innocent ».

Exprimez le témoignage de chacun des suspects dans le symbolisme logique. Calculez les valeurs de vérité des trois formules obtenues, puis répondez aux questions suivantes :

- les témoignages sont-ils compatibles ?
- quel témoignage d'un suspect découle de celui d'un autre ?
- en supposant que tous sont innocents, lequel aurait produit un faux serment ?
- en supposant que le témoignage de chacun des suspects est vrai, qui est innocent, qui est coupable ?
- en supposant que l'innocent a dit la vérité et que le coupable a menti, qui est innocent et qui est coupable ?