

PROGRAMMATION DYNAMIQUE : PRODUITS DE MATRICES

Soit A, B deux matrices de taille (n, p) et (p, q) . On peut alors calculer le produit AB :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket \quad (AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^p A_{i,k} B_{k,j}$$

ce qui nécessite npq produits de nombres à calculer (on ne tient pas compte des sommes, car elles sont bien moins coûteuses en temps-machine).

Supposons qu'on doive effectuer le produit de 3 matrices A, B, C de tailles $(2, 5), (5, 8), (8, 6)$. On peut effectuer les opérations de deux façons :

- $ABC = (AB)C$, qui coûte $(2 \times 5 \times 8) + 2 \times 8 \times 6 = 176$ multiplications ;
- $ABC = A(BC)$, qui coûte $(5 \times 8 \times 6) + 2 \times 5 \times 6 = 300$ multiplications.

On a donc intérêt à choisir la première façon plutôt que la deuxième.

Plus généralement, si on a un produit de n matrices à calculer $A_0 \dots A_{n-1}$ de tailles $(t_0, t_1), (t_1, t_2), \dots, (t_{n-1}, t_n)$, il peut être intéressant de calculer d'abord la façon d'organiser les produits avant de les réaliser. On cherche donc à parenthéser le produit $A_0 \dots A_{n-1}$ de sorte que le nombre de multiplications de nombres soit minimal.

Pour $(i, j) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket^2$ tel que $i \leq j$, on note $m(i, j)$ le nombre minimal de multiplications de nombres à effectuer pour calculer le produit $A_i \dots A_j$.

1) Soit k tel que $i \leq k < j$. On écrit le produit $A_i \dots A_j$ sous la forme $(A_i \dots A_k)(A_{k+1} \dots A_j)$: en supposant qu'on a calculé les produits entre parenthèses de manière optimale, combien coûte ce produit ?

2) Donnez la formulation récursive du calcul de $m(i, j)$.

3) Écrivez une fonction `produit t` de type `int vect -> int`, où `t` est le tableau contenant les tailles des matrices t_0, \dots, t_n , qui calcule le nombre minimal de multiplications de nombres à effectuer pour calculer le produit de matrices correspondant.

Donnez les valeurs optimales si $t = (13; 5; 89; 3; 34)$ ou si $t = (25; 8; 62; 14; 77; 23; 2; 59; 75; 27; 5; 19; 41)$.

4) Quelle est sa complexité en fonction de n ?

5) Modifiez la fonction précédente pour qu'elle donne en plus la façon optimale d'organiser les produits de matrices.