Les fonctions seront tous récursives : aucune boucle, aucune référence ne sera utilisée. Ils seront écrits en code CAML.

Dans tout le sujet, vous ferez la distinction entre les notations « $\frac{n}{2}$ » qui désigne le quotient rationnel exact d'un entier n par 2 et « $n/2$ » qui désigne le quotient de la division euclidienne de n par 2. Le logarithme en base 2 d'un entier n est noté $\log n$.

Problème 1 - Parties finies de $\mathbb{N}$

Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$.

On définit une application φ de $\mathscr{F}$ dans $\mathbb{N}$ de la façon suivante : si A est une partie finie de $\mathbb{N}$, on pose $\varphi(A) = \sum_{x \in A} 2^x$.

Par exemple, on a les valeurs suivantes :
- $\varphi(\varnothing) = 0$
- si A est un singleton $\{n\}$, alors $\varphi(A) = 2^n$
- $\varphi(\{0, 2, 5\}) = 2^0 + 2^2 + 2^5 = 37$
- $\varphi(\{1, 2, 4, 6\}) = 86$

Si A est un élément de $\mathscr{F}$, on note $A^* = A - \{0\}$, $\overline{A} = \{x - 1/x \in A^*\}$ et $\underline{A} = \{x + 1/x \in A\}$.

Avec ces notations, si $A = \{1, 5\}$, alors $\overline{A} = \{0, 4\}$, $\underline{A} = \{2, 6\}$ et si $A = \{0, 2, 7\}$, $\overline{A} = \{1, 6\}$, $\underline{A} = \{1, 3, 8\}$.

Partie 1 - Quelques propriétés de φ

Question 1) Soit $A \in \mathscr{F}$, A non vide.

a) À quelle condition sur $\varphi(A)$ la partie A contient-elle 0 ?

b) Calculez $\varphi(\overline{A})$ et $\varphi(\underline{A})$ en fonction de $\varphi(A)$.

Question 2) Plus précisément, donnez l'expression de $\varphi(A)$ en fonction de $\varphi(\overline{A})$ selon que A contienne ou non l'élément 0. Justifiez que cette relation est en fait une définition récursive de la fonction φ en mettant en évidence la/les fonction(s) de descente et la valuation v associée (voir théorème du cours).

Question 3) Justifiez que φ est une bijection. Vous pouvez vous servir du fait bien connu : tout entier naturel a une unique écriture en base 2.

Pour représenter informatiquement une partie A de $\mathscr{F}$, on a deux solutions :
- on la représente par la liste (ou le tableau) d'entiers qui contient exactement ses éléments ;
- on la représente par l'entier $n = \varphi(A)$.

Cette dernière représentation étant plus compacte que la première, désormais on fait ce choix en notant $E(n)$ la partie de $\mathscr{F}$ telle que $\varphi(E(n)) = n$.

La suite du problème est de modéliser les opérations usuelles sur les parties (union, intersection, différence, etc) en utilisant cette représentation.

Partie 2

Question 1) Si $A = E(n)$, précisez l'entier p tel que $E(p) = \overline{A}$ et l'entier q tel que $E(q) = \underline{A}$.

Question 2) Soit n un entier naturel non nul, on veut définir la fonction récursive `pgr n` qui calcule le plus grand élément de $E(n)$.

a) Si $n = 1$, que vaut cet élément ?

b) Si $n \geqslant 2$, précisez le plus grand élément de $E(n)$ en fonction de celui de $E(n/2)$.

c) Écrivez la fonction `pgr n`.

d) Justifiez que votre fonction termine.

Question 3) Donnez une fonction récursive `ppe n` qui calcule le plus petit élément de l'ensemble $E(n)$ pour $n \geqslant 1$.

Question 4) Donnez une fonction récursive de paramètre n qui donne le cardinal de $E(n)$.

Partie 3

Question 1) Soit x, n deux entiers naturels, on veut définir une fonction `app x n` récursive qui permet de savoir si $x \in E(n)$, autrement dit cet fonction retourne la valeur booléenne `true` si $x \in E(n)$ et `false` sinon.

a) Si $n = 0$, quelle est cette valeur ?

b) Si $n \neq 0$ et $x = 0$, comment calculer cette valeur booléenne ?

c) Si $n \neq 0$ et $x \neq 0$, justifiez l'équivalence $x \in E(n) \iff x - 1 \in E(n/2)$.

d) Écrivez la fonction `app x n`.

Question 2) Soit m, n deux entiers naturels, on veut définir une fonction récursive `inter m n` qui calcule l'entier p tel que $E(p) = E(m) \cap E(n)$.

a) Précisez les cas de bases.

b) Si m et n sont impairs, justifiez que $E(p) = \{0\} \cup (E(m-1) \cap E(n-1))$. En notant q l'entier tel que $E(q) = E(m-1) \cap E(n-1)$, exprimez p en fonction de q.

c) Faites de même dans les cas où l'un des deux est pair et l'autre impair.

d) Enfin, si m et n sont pairs, on calcule l'entier q tel que $E(q) = E(m/2) \cap E(n/2)$. Exprimez p en fonction de q.

e) Écrivez la fonction `inter m n` et justifiez qu'elle termine.

Question 3) En étudiant plus finement le fonctionnement de la fonction précédente, montrez qu'on peut en donner une version dont l'appel récursif est uniquement `inter (m/2) (n/2)` dans tous les cas.

Question 4) Soit m, n deux entiers naturels, écrivez une fonction récursive `union m n` qui calcule l'entier p tel que $E(p) = E(m) \cup E(n)$ et justifiez brièvement son fonctionnement.

Question 5)

a) Écrivez une fonction `disjoints m n` qui retourne un booléen permettant de savoir si les parties $E(m)$ et $E(n)$ sont disjointes ou non.

b) Écrivez une fonction `inclus m n` qui retourne un booléen permettant de savoir si $E(m)$ est incluse dans $E(n)$ ou non.

Question 6) Écrivez une fonction `diff m n` qui calcule l'entier p tel que $E(p) = E(m) - E(n) = E(m) \setminus E(n)$.

Partie 4

Donnez des fonctions récursives de paramètre n qui donnent la somme des éléments de $E(n)$ ou la somme des carrés des éléments de $E(n)$.

Devoir non surveillé 1 - Corrigé

Problème 1

Partie 1

Question 1)

a) Si A contient 0, alors dans la somme $\varphi(A)$, tous les termes sont pairs sauf le premier qui vaut $2^0 = 1$ donc $\varphi(A)$ est impair.

Si A ne contient pas 0, alors tous les termes de la somme sont pairs donc $\varphi(A)$ est pair.

Conclusion : $0 \in A \iff \varphi(A)$ est impair.

b) $\varphi(\underline{A}) = \sum_{x \in A} 2^{x+1} = \sum_{x \in A} (2 \times 2^x) = 2\varphi(A)$.

$\varphi(\overline{A}) = \sum_{x \in A^*} 2^{x-1} = \sum_{x \in A^*} \frac{2^x}{2} = \frac{1}{2}\varphi(A^*)$.

De plus, $\varphi(A^*) = \varphi(A)$ si $0 \notin A$, autrement dit si $\varphi(A)$ est pair ; et $\varphi(A^*) = \varphi(A) - 1$ si $0 \in A$, autrement dit si $\varphi(A)$ est impair.

Donc dans les deux cas, on $\varphi(\overline{A}) = \varphi(A)/2$ (quotient de la division euclidienne).

Question 2) On vient de montrer que $\varphi(A) = 2\varphi(\overline{A})$ si $0 \notin A$ et $\varphi(A) = 2\varphi(\overline{A}) + 1$ si $0 \in A$.

Or il est clair que si A n'est pas vide, alors la somme $v(\overline{A})$ des éléments de A est strictement inférieure à la somme $v(A)$ des éléments de A. On dispose ainsi d'une valuation v de $\mathscr{F}$ dans $\mathbb{N}$ et d'une fonction de descente $d : A \mapsto \overline{A}$ définie sur $\mathscr{F} - \{\varnothing\}$ à valeurs dans $\mathscr{F}$ telles que si $A \neq \varnothing$, $v(d(A)) < v(A)$.

On a donc une définition récursive de φ :

— cas de base : si $A = \varnothing$, alors $\varphi(A) = 0$
— cas récursif : si $A \neq \varnothing$
  — si $0 \notin A$, alors $\varphi(A) = 2\varphi(\overline{A})$
  — si $0 \in A$, alors $\varphi(A) = 2\varphi(\overline{A}) + 1$

Question 3) Soit n un entier naturel : il a une unique écriture en base 2, $n = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i 2^i$ où a_i est un chiffre binaire, c'est-à-dire 0 ou 1 et étant entendu que cette somme est en fait finie, c'est-à-dire que la suite (a_i) est nulle à partir d'un certain rang.

On pose $A = \{i \in \mathbb{N} \ / \ a_i = 1\}$: A est donc un ensemble fini d'entiers naturels et il est clair que $\varphi(A) = n$.

Ceci prouve que φ est surjective.

Évidemment, l'unicité de la décomposition en base 2 d'un entier se retrouve dans l'unicité de A telle que $\varphi(A) = n$.

Donc φ est bijective.

Partie 2

Question 1) D'après la question 1 de la partie 1, on a $p = \varphi(E(p)) = \varphi(\overline{A}) = \varphi(A)/2 = n/2$ et $q = \varphi(E(q)) = \varphi(\underline{A}) = 2\varphi(A) = 2n$.

Question 2)

a) Si $n = 1$, alors $E(1) = \{0\}$ donc le plus grand élément de $E(1)$ est 0.

b) Si $n \geqslant 2$, alors la partie $E(n)$ contient au moins un élément supérieur ou égal à 1, son maximum est donc un entier $x \geqslant 1$. Dans ce cas, $x - 1$ appartient à $\overline{E(n)} = E(n/2)$ et est le plus grand élément de $E(n/2)$, donc x est le plus grand élément de $E(n/2)$ auquel on ajoute 1.

c) Remarque : c'est en fait l'algorithme vu en TD qui calcule la partie entière du logarithme en base 2 de n.

```
let rec pgr n =
  if n = 1 then 0
 else 1 + pgr ( n / 2 ) ;;
```

d) En dehors du cas de base, on a $n/2 < n$ donc le paramètre de la fonction décroît strictement à chaque appel récursif dans l'ensemble bien fondé $\mathbb{N}$, donc l'algorithme termine.

Question 3)

```
let rec ppe n =
  if n mod 2 = 1 then 0
  else 1 + ppe ( n / 2 ) ;;
```

C'est quasiment le même algorithme, avec un cas de base plus large : si n est impair, alors la partie $E(n)$ contient 0 donc le plus petit élément est 0. Sinon, le plus petit élément de $E(n)$ est le plus petit de $E(n/2)$ auquel on ajoute 1.

Question 4) Si n est pair, alors $\operatorname{card} E(n) = \operatorname{card} E(n/2)$ et si n est impair, $\operatorname{card} E(n) = 1 + \operatorname{card} E(n/2)$ (bien sûr, ceci n'est vrai que pour $n \geqslant 1$).

```
let rec card n =
  if n = 0 then 0
  else
    let p = card (n / 2) in
    p  + (n mod 2);;
```

Partie 3

Question 1)

a) Si $n = 0$, alors $E(n)$ est l'ensemble vide, donc la valeur booléenne est fausse.

b) On a vu que 0 appartient à A si et seulement si $\varphi(A)$ est impair, donc on calcule le reste de la division euclidienne de n par 2 et on retourne la valeur booléenne de son égalité à 1.

c) C'est le cas récursif : x étant non nul, $x - 1$ est un entier naturel, donc
$x \in E(n) \iff x - 1 \in \overline{E(n)} \iff x - 1 \in E(n/2)$.

d)

```
let rec app x n =
  if n = 0 then false
  else if x = 0 then (n mod 2 = 1)
  else app (x - 1) (n / 2);;
```

Autre version utilisant les opérateurs logiques et l'évaluation paresseuse des booléens :

```
let rec app x n =
  (n > 0) && (x > 0 || (n mod 2 = 1)) && (x = 0 || app (x - 1) (n / 2));;
```

Question 2)

a) Si l'un des deux entiers est nul, alors l'une des deux parties est vide, donc l'intersection est vide.

b) Si m et n sont impairs, alors $E(m)$ et $E(n)$ contiennent 0, donc l'intersection contient 0 et tous les autres éléments non nuls communs, c'est-à-dire ceux de $E(m)^* \cap E(n)^*$. Or $E(m)^* = E(m-1)$ et $E(n)^* = E(n-1)$ donc on a bien $E(p) = \{0\} \cup (E(m-1) \cap E(n-1))$. Donc si $E(q) = E(m-1) \cap E(n-1)$, alors $E(p) = \{0\} \cup E(q) = E(q+1)$, donc $p = q + 1$.

c) Si l'un est pair (disons m) et l'autre impair (donc n), alors 0 appartient à $E(n)$ mais pas à $E(m)$ donc 0 n'appartient pas à l'intersection. Les éléments de l'intersection sont donc les éléments communs à $E(m)$ et $E(n)^* = E(n-1)$. Donc $E(p) = E(m) \cap E(n-1)$. Dans l'autre cas, on a $E(p) = E(m-1) \cap E(n)$.

d) Si m et n sont pairs, alors aucune des deux parties ne contient 0 : $\underline{\text{un élément}}$ x est $\underline{\text{commun}}$ à $E(m)$ et $E(n)$ si et seulement si il est non nul et si $x-1$ est donc commun à $\overline{E(m)} = E(m/2)$ et à $\overline{E(n)} = E(n/2)$. Donc on a la relation :

$$E(m) \cap E(n) = \underline{\overline{E(m)} \cap \overline{E(n)}} = \underline{E(m/2) \cap E(n/2)}$$

Si on sait calculer $E(q) = E(m/2) \cap E(n/2)$, on en déduit que $E(p) = \underline{E(q)} = E(2q)$, donc $p = 2q$.

e)
```
let rec inter m n =
  if m = 0 || n = 0 then 0
  else let m2 = m mod 2 and n2 = n mod 2 in
    if (m2 , n2) = (1, 1) then
      1 + inter (m - 1) (n - 1)
    else if (m2, n2) = (0, 1) then
      inter (m) (n - 1)
    else if (m2, n2) = (1, 0) then
      inter (m - 1) (n)
    else 2 * inter (m / 2) (n / 2);;
```

Cet algorithme termine, car en dehors des cas de base, la somme des deux paramètres décroît strictement à chaque appel récursif dans l'ensemble bien fondé $\mathbb{N}$.

Question 3) On peut en fait simplifier l'algorithme en remarquant que dans les cas autres que « m et n pairs », on se retrouve avec deux entiers pairs, donc qu'à l'appel récursif suivant, on est dans le cas « m et n pairs », donc on va diviser les paramètres par 2 ; on peut donc le faire immédiatement et on n'a plus qu'un seul type d'appel récursif `inter (m / 2) (n / 2)`. On condense en un seul appel récursif ce qui était calculé en deux appels récursifs et on modifie donc la valeur de retour de l'algorithme en conséquence.

```
let rec inter m n =
  if m = 0 || n = 0 then 0
  else
    let m2 = m mod 2 and n2 = n mod 2 in
    let q = inter (m / 2) (n / 2) in
    if (m2, n2) = (1, 1) then 1 + 2 * q
    else 2 * q ;;
```

Question 4) C'est le même type de raisonnement :
— si l'un des deux entiers est nul, la réunion est l'autre ensemble
— sinon, on distingue le cas « pairs » :
  — 0 n'est dans aucun des deux donc la réunion est obtenue en enlevant 1 à chaque élément (($E(m/2)$ et $E(n/2)$), en réunissant ces deux parties ($E(q) = E(m/2) \cup E(n/2)$) et en rajoutant le 1 enlevé au début à chaque élément, donc on obtient $E(p) = E(q) = 2q$
  — sinon 0 est dans l'un des deux, donc en faisant le même genre d'opérations, il faut juste le rajouter dans la réunion, ce qui revient à ajouter 1 au résultat $2q$

```
let rec union m n =
  if m = 0 then n
  else if n = 0 then m
  else
    let m2 = m mod 2 and n2 = n mod 2 in
    let q = union (m / 2) (n / 2) in
    if (m2 , n2) = (0, 0) then 2 * q
    else 1 + 2 * q;;
```

Question 5)

a) Deux ensemble sont disjoints si et seulement si leur intersection est vide.

```
let disjoints m n =
  let p = inter m n in
  (p = 0);;
```

b) $A \subset B \iff A \cap B = A$

```
let inclus m n =
  let p = inter m n in
  (p = m) ; ;
```

Question 6) Il est évident que si $A \subset B$, alors $\varphi(B) = \varphi(A) + \varphi(B - A)$. On exploite cette propriété dans l'algorithme suivant, en remarquant que $E(m) - E(n) = E(m) - (E(m) \cap E(n))$ et que $E(m) \cap E(n) \subset E(m)$, donc $\varphi(E(m) - E(n)) = \varphi(E(m)) - \varphi(E(m) \cap E(n)) = m - q$ où q est l'entier tel que $E(q) = E(m) \cap E(n)$.

```
let diff m n =
  let q = inter m n in
 m - q;;
```

Partie 4

En dehors du cas de base $n = 0$, 0 ne compte pas dans la somme, donc on veut en fait calculer la somme des éléments de $E(n)^* = \{x_0, \dots, x_k\}$: alors $E(n/2) = \{x_0 - 1, \dots, x_k - 1\}$, donc

$$s(n/2) = \sum_{i=0}^{k}(x_i - 1) = \sum_{i=0}^{k} x_i - (k+1) = s(n) - \text{card}(E(n/2)).$$

De même pour l'autres somme : $S(n/2) = \sum_{i=0}^{k}(x_i - 1)^2 = \sum_{i=0}^{k} x_i^2 - 2\sum_{i=0}^{k} x_i + (k+1) = S(n) - s(n) + \text{card}(E(n/2))$.

```
let rec somme n =
  if n = 0 then 0
  else somme (n/2) + card (n/2);;

let rec sommecarres n =
  if n = 0 then 0
  else sommecarres (n/2) + 2 * somme n - card (n/2);;
```