Exercice 6

Si $\mathcal{L}$ est un langage sur un alphabet fini Σ et si n est un entier naturel non nul, on note $\mathcal{L}(n)$ le langage formé par les mots de $\mathcal{L}$ qui sont de longueur n.

1. Justifier que le langage $\mathcal{L}(n)$ est de cardinal fini.

Dans la suite, on note $u_n^{\mathcal{L}}$ le cardinal du langage $\mathcal{L}_n$.

2. Dans cette question, l'alphabet Σ désigne l'alphabet à trois lettres $\Sigma = \{a, b, c\}$ et $\mathcal{L}$ est le langage des mots finis sur Σ qui contiennent au moins un c. Ce langage est donné par l'expression rationnelle :
$$\mathcal{L} = \{a, b\}^* c \{a, b, c\}^*.$$
   a) Dessiner un automate déterministe à deux états qui reconnait exactement le langage $\mathcal{L}$.
   b) Soit n un entier naturel non nul.
      i) Dessiner un automate qui reconnait exactement le langage $\mathcal{L}(n)$.
      ii) On suppose $n \geqslant 2$. Soit $\mathcal{U}_{n-1}$ le langage $\{a, b, c\}^*(n-1)$. Démontrer que $\mathcal{L}(n)$ est la réunion disjointe des langages $\{a, b\}\mathcal{L}(n-1)$ et $c\,\mathcal{U}_{n-1}$. En déduire la relation de récurrence :
$$u_n^{\mathcal{L}} = 2u_{n-1}^{\mathcal{L}} + 3^{n-1}.$$
      iii) Exprimer $u_n^{\mathcal{L}}$ en fonction de n.

3. Dans cette question, on suppose que $\mathcal{L}$ est le langage reconnu par un automate déterministe $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, 1, f, \delta)$ où :

   - Q est l'ensemble fini des états de $\mathcal{A}$. On note m son cardinal et on suppose que m est un entier naturel $\geqslant 2$. Les états dans Q sont numérotés de 1 à m.
   - 1 est le numéro de l'état initial de $\mathcal{A}$,
   - f est le numéro de l'unique état final de $\mathcal{A}$,
   - δ est la fonction de transition de $\mathcal{A}$ définie d'une partie de $Q \times \Sigma$ dans Q.

   On considère la matrice (m, m) $M = (m_{i,j})$ définie par : $m_{i,j}$ est le nombre de transitions de source l'état i et de but l'état j dans l'automate $\mathcal{A}$. On note $\chi_M(X) = X^m - \sum_{k=0}^{m-1} a_{m-k} X^k$ le polynôme caractéristique de la matrice M.

   Pour tout état j de Q, on note $\mathcal{L}_j$ le langage reconnu par l'automate $(Q, \Sigma, j, f, \delta)$; ainsi défini, $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, soit $V(n)$ le vecteur de coordonnées $x_1, ..., x_m$ où x_j est le cardinal du langage $\mathcal{L}_j(n)$, pour tout j dans Q.

   a) Expliciter les coordonnées du vecteur $V(1)$ en fonction de δ.
   b) Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$ et pour tout j dans Q, $\mathcal{L}_j(n)$ est la réunion disjointe des langages $a\mathcal{L}_k(n-1)$ pour tout (j, a, k) dans $Q \times \Sigma \times Q$ tel que $\delta(j, a) = k$.
   c) En déduire, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'égalité $V(n) = M^{n-1}V(1)$.
   d) En utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, démontrer que la suite $(u_n^{\mathcal{L}})$ vérifie la relation de récurrence :
$$u_{n+m}^{\mathcal{L}} = a_1 u_{n+m-1}^{\mathcal{L}} + a_2 u_{n+m-2}^{\mathcal{L}} + \cdots + a_m u_n^{\mathcal{L}}.$$
   Dans le cas où χ_M a m racines distinctes $\alpha_1, ..., \alpha_m$, que peut-on en déduire pour la suite $(u_n^{\mathcal{L}})$?

4. Soit $\mathcal{L}$ le langage sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ reconnu par l'automate $\mathcal{B} = (Q, \Sigma, 1, 2, \delta)$ ci-dessous :

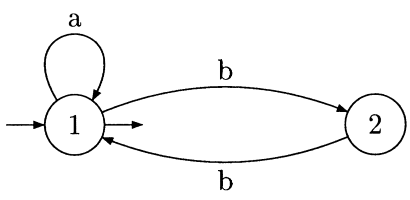

Figure 1: Automate $\mathcal{B}$

   a) Donner une expression rationnelle de $\mathcal{L}$.
   b) Expliciter la suite $(u_n^{\mathcal{L}})_{n \geqslant 1}$.

Exercice 7

Soit n un entier naturel $\geqslant 2$. Soit f une fonction booléenne à n variables. On dit que f définit implicitement sa n-ième variable si pour tout n-uplet $(x_1, ..., x_{n-1})$ de $\{0,1\}^{n-1}$, il existe un unique x_n dans $\{0,1\}$ tel que $f(x_1, ..., x_n) = 0$.

1. Dans cette question, $n = 2$. Soit f_1 la fonction boolénne définie par ses valeurs présentées dans la table ci-dessous :

x_1	x_2	$f_1(x_1, x_2)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

   Démontrer que f_1 définit implicitement sa seconde variable. Expliciter toutes les fonctions booléennes sur $\{0,1\}^2$ qui définissent implicitement leur seconde variable.

Soit f une fonction booléenne à n variables.

2. Démontrer que f définit implicitement sa n-ième variable si et seulement si f vérifie la propriété suivante :
$$\forall (x_1, ..., x_{n-1}, x_n) \in \{0,1\}^n, f(x_1, ..., x_{n-1}, \overline{x}_n) = \overline{f(x_1, ..., x_n)}.$$

3. Soit f la fonction booléenne définie par :
$$\forall (x_1, ..., x_{n-1}, x_n) \in \{0,1\}^n, f(x_1, ..., x_n) = x_1 x_2 ... x_n + \sum_{i=1}^{n-1} \overline{x}_i \overline{x}_n.$$
   Démontrer que f définit implicitement sa n-ième variable. Démontrer plus précisément qu'il existe une fonction booléenne g sur $\{0,1\}^{n-1}$, telle que
$$\forall (x_1, ..., x_{n-1}, x_n) \in \{0,1\}^n, \; (\; f(x_1, ..., x_n) = 0 \Leftrightarrow x_n = g(x_1, ..., x_{n-1}) \;).$$
   Préciser g.