SOUS-SOMME MAXIMALE

1 Principe de l'algorithme

Si s est une suite finie d'entiers relatifs $s = (a_0, ..., a_{n-1})$ de longueur n, on appelle somme de s, notée $\sigma(s)$, la somme de tous les éléments de s :

$$\sigma(s) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i$$

Si la suite est la suite vide (*i.e.* de longueur 0), alors on pose $\sigma(s) = 0$.

On appelle dans ce problème sous-suite de s toute suite constituée d'éléments *consécutifs* de s :

si $s = (1, 5, -3, -8, 2, 6, 7, 1)$, alors $s' = (5, -3, -8, 2)$ est une sous-suite alors que $s'' = (5, -8, 2)$ n'en est pas une.

On dira qu'une sous-suite de s est cofinale à s si elle est de la forme $a_k, ..., a_{n-1}$ (où $k \in \{0, ..., n-1\}$) ou si elle est vide. De même, on dira qu'elle est co-initiale à s si elle est de la forme $a_0, ..., a_k$ (où $k \in \{0, ..., n-1\}$) ou si elle est vide.

L'objectif du TP est de construire un algorithme de paramètre une suite finie d'entiers relatifs par la méthode « diviser pour régner », qui détermine une sous-suite de somme maximale. En particulier, si la suite ne contient que des termes strictement négatifs, cet algorithme retourne la suite vide ayant pour somme 0.

Par exemple, si $s = (-3, 5, -1, 5, -3, -6, 8)$, alors une sous-suite de somme maximale est $s' = (5, -1, 5)$. De même, si la suite est vide, alors la sous-suite de somme maximale est la suite vide de somme 0.

Soit s une suite d'entiers relatifs de longueur n. On la partage en deux sous-suites s', s'' de longueurs à peu prés égales à $n/2$ telles que $s = s'\ s''$.

Soit s_m une sous-suite de s de somme maximale. Trois cas se présentent :
- s_m est une sous-suite de s' ;
- s_m est une sous-suite de s'' ;
- s_m est « à cheval » sur s' et s'' : le premier élément de s_m appartient à s' et son dernier élément appartient à s''.

Les deux premiers cas sont accessibles par appel récursif de l'algorithme. Si on est dans le dernier cas, alors les deux sous-suites $s_m \cap s'$ et $s_m \cap s''$ sont de somme maximale parmi respectivement les suites cofinales à s' et les suites co-initiales à s'' (réfléchissez-y quelques instants pour vous en convaincre...). En cherchant donc la suite cofinale à s' de somme maximale s_d et la suite co-initiale à s'' de somme maximale s_g, on reconstitue $s_m = s_d\ s_g$

2 Représentation informatique

On représente une suite d'entiers relatifs par un tableau de type `int vect`. La fonction à construire doit retourner trois entiers (a, b, x) tels que s soit la sous-somme maximale de t, somme de la sous-suite $s_a, \ldots, s_{b-1}$. En particulier, si le tableau ne contient que des négatifs, elle doit retourner un triplet de la forme $(a, a, 0)$.

Avec l'exemple $s = (-3, 5, -1, 5, -3, -6, 8)$, une sous-suite de somme maximale est $s' = (5, -1, 5)$, donc la fonction doit retourner le triplet $(1, 4, 9)$.

Écrivez ce qu'il faut pour déterminer par cette méthode une sous-suite de somme maximale d'une suite donnée. Vous éviterez de découper physiquement les tableaux, mais vous travaillerez sur des tranches de tableau. Éventuellement, dans un premier temps, vous pouvez travailler sur des découpages de tableaux puis adapter votre code à des tranches de tableaux.