Partie III : Automates et langages

Le but de cet exercice est l'étude des propriétés de l'opération $\times$ calculant le produit de deux automates finis déterministes.

Soit l'alphabet X, un ensemble de symboles, soit Λ le symbole représentant le mot vide ($\Lambda \notin X$), un automate fini sur X est un quintuplet $A = (Q, X, i, T, \delta)$ composé de :

- Un ensemble d'états : Q,
- L'état initial : $i \in Q$,
- Un ensemble d'états terminaux : $T \subseteq Q$,
- Une fonction de transition : $\delta : X \times Q \to Q$

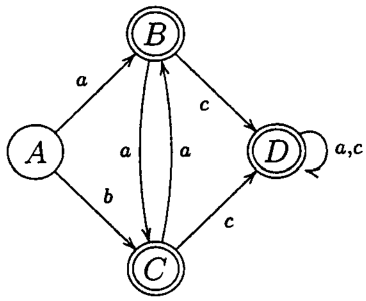
Les valeurs de la fonction de transition δ seront représentées par un graphe dont les nœuds sont les états. Un état initial sera entouré d'un cercle (i) et un état final sera entouré d'un double cercle $((t))$.

Le langage sur $X^\star$ reconnu par cet automate fini est :

$$L(A) = \{m \in X^\star \mid t \in T, \delta^\star(m, i) = t\} \text{ avec } \begin{array}{l} \delta^\star(\Lambda, q) = q \\ \delta^\star(x, q) = \delta(x, q) \\ \delta^\star(m.x, q) = \delta(x, \delta^\star(m, q)) \end{array}$$

Étude de l'exemple $\mathcal{E}_1$

Soit l'automate fini déterministe $\mathcal{E}_1 = (\{A, B, C, D\}, \{a, b, c\}, A, \{B, C, D\}, \delta_{\mathcal{E}_1})$ dont la fonction de transition est définie par :

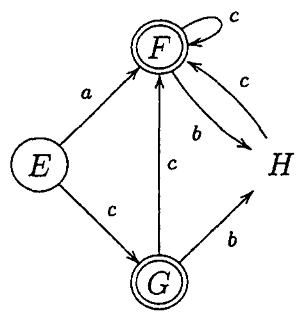


Question III.1 *Caractériser le langage reconnu par $\mathcal{E}_1$ par une expression régulière ou ensembliste.*

Tournez la page S.V.P.

Étude de l'automate $\mathcal{E}_2$

Soit l'automate fini déterministe $\mathcal{E}_2 = (\{E, F, G, H\}, \{a, b, c\}, E, \{F, G\}, \delta_{\mathcal{E}_2})$ dont la fonction de transition est définie par :



Question III.2 *Caractériser le langage reconnu par $\mathcal{E}_2$ par une expression régulière ou ensembliste.*

Construction de l'automate « produit » : $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$

Soit l'opération interne $\times$ sur les automates finis déterministes définie par :

Déf. III.1 (Produit d'automates) *Soient $A_1 = (Q_1, X, q_1, T_1, \delta_1)$ et $A_2 = (Q_2, X, q_2, T_2, \delta_2)$ deux automates finis déterministes, l'automate produit $A = A_1 \times A_2$ est défini par :*

$$A = (Q_1 \times Q_2, X, (q_1, q_2), T_1 \times T_2, \delta_{1\times 2})$$
$$\delta_{1\times 2}(a, (x, y)) = (x', y') \text{ si } \delta_1(a, x) = x' \text{ et } \delta_2(a, y) = y'$$

Question III.3 *Construire l'automate $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$.*

Question III.4 *Caractériser le langage reconnu par $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$ par une expression régulière ou ensembliste. Comparer ce langage avec les langages reconnus par $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$.*

Étude de l'automate « produit »

Question III.5 *Montrer que $\delta^\star_{1\times 2}(m, (q_1, q_2)) = (\delta^\star_1(m, q_1), \delta^\star_2(m, q_2))$*

Question III.6 *Montrer que : $m \in L(A_1 \times A_2) \Leftrightarrow (m \in L(A_1) \wedge m \in L(A_2))$.*

Question III.7 *Quelle relation liant les langages reconnus par A_1, A_2 et $A_1 \times A_2$ peut-on en déduire ?*

Fin de l'énoncé