1 Définition inductive d'ensembles

1.1 Généralités

Définition. Soit U un ensemble (appelé univers), B une partie de U et Co un ensemble de fonctions c de $U^{n(c)}$ dans U : c est appelé un constructeur d'arité $n(c)$.

Une partie S de U est dite stable par Co si et seulement si pour tout $c \in \text{Co}$, pour tout $(x_1, \ldots, x_{n(c)}) \in S^{n(c)} \cap D_c$, $c(x_1, \ldots, x_{n(c)}) \in S$.

Théorème 1 *Avec les mêmes notations, on montre qu'il existe une plus petite partie R de U, stable par* Co *et qui contient B : on l'appelle l'ensemble défini récursivement par les conditions*

(*) $B \subset R$

(**) si c est un constructeur et $x_1, \ldots, x_{n(c)}$ sont des éléments de R et dans l'ensemble de définition de c, alors $c(x_1, \ldots, x_{n(c)})$ est encore un élément de R

Intuitivement, R est la partie de U construite à partir des éléments de B en appliquant un nombre fini de fois les constructeurs sur des éléments déjà construits.

La condition (*) est le cas de base, la condition (**) est le cas inductif, les deux conditions forment la définition inductive (ou récursive) de R.

1.2 Exemples

a) ensembles de nombres

Avec les notations précédentes,

— $U = \mathbb{N}$, $B = \{0\}$ et $\text{Co} = \{x \mapsto x + 2\}$: R est l'ensemble des entiers naturel pairs

— $U = \mathbb{R}$, $B = \{1\}$ et $\text{Co} = \{+, -, \times, \div\}$: R est l'ensemble des rationnels

b) ensembles de mots sur un alphabet

Soit A un ensemble appelé alphabet, U l'ensemble des suites finies d'éléments de A (mots sur l'alphabet A). Si u, v sont deux mots sur A, alors on note uv leur concaténation, c'est-à-dire le mot constitué des lettres de u suivies de celles de v.

On fixe deux lettres distinctes a et b et on note ε le mot vide.

L'ensemble M défini inductivement par les conditions

— a et b appartiennent à M

— si $u \in M$, alors $aub \in M$

est l'ensemble des mots de la forme $aa \ldots abb \ldots b$ tels que le nombre de a et le nombre de b soient égaux à un prés.

L'ensemble N défini inductivement par les conditions

— ε appartiennent à N

— si $u \in M$, alors $uba \in N$

— si $(u, v) \in M^2$, alors $uav \in N$

est l'ensemble des mots de la forme qui ne contiennent que des a ou des b, qui se terminent par un a et qui ne contiennent pas deux b consécutifs.

c) listes

Soit E un ensemble, Nil un objet n'appartenant pas à E.

L'ensemble $L(E)$ des listes d'éléments de E est défini inductivement par :

— $\text{Nil} \in L(E)$

— si $\ell \in L(E)$ et $a \in E$, alors $(a, \ell) \in L(E)$

1.3 Principe d'induction structurelle

Théorème 2 *Soit U, B et* Co *défini comme précédemment et R la partie définie récursivement par les conditions (*) et (**). Soit $\mathscr{P}(x)$ une proposition dépendant d'une variable x appartenant à U.*

On suppose que :

— pour tout $x \in B$, $\mathscr{P}(x)$ est vraie

— pour tout constructeur $c \in \text{Co}$ et $(x_1, \ldots, x_{n(c)}) \in U^{n(c)} \cap D_c$,

si $\mathscr{P}(x_1), \ldots, \mathscr{P}(x_{n(c)})$ sont vraies, alors $\mathscr{P}(\,c(x_1, \ldots, x_{n(c)})\,)$ est vraie

Alors pour tout $x \in R$, $\mathscr{P}(x)$ est vraie.