CALCUL PROPOSITIONNEL

1 Formules logiques

1.1 Ensemble des formules

Définition. On se donne un ensemble au plus dénombrable (*i.e.* fini ou en bijection avec $\mathbb{N}$) noté $\mathscr{V}$, appelé ensemble des variables propositionnelles.

On se donne aussi un ensemble $\mathscr{C}$, disjoint de $\mathscr{V}$, contenant 7 éléments notés ( ) $\neg$ (négation) $\wedge$ (conjonction) $\vee$ (disjonction) $\perp$ et $\top$.

On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des suites finies d'éléments de $\mathscr{V} \cup \mathscr{C}$ (représentées par simple juxtaposition de leurs éléments).

Enfin, on appelle ensemble des formules propositionnelles (ou formules logiques) le sous-ensemble $\mathscr{F}$ de $\mathscr{S}$ défini par induction :
- pour tout $x \in \mathscr{V}$, $x \in \mathscr{F}$ (cas de base)
- $\perp$ et $\top$ appartiennent à $\mathscr{F}$ (cas de base)
- pour tout $f \in \mathscr{F}$, $(\neg f) \in \mathscr{F}$
- pour tout $(f, g) \in \mathscr{F}^2$, $(f \wedge g) \in \mathscr{F}$ et $(f \vee g) \in \mathscr{F}$.

Remarque. la définition de $\mathscr{F}$ dépend du choix de l'ensemble $\mathscr{C}$; il arrive souvent qu'on ajoute deux ou trois autres symboles $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\oplus$, on obtient ainsi un autre ensemble de formules logiques qui contient $\mathscr{F}$, mais on montre que moyennant l'utilisation de synonymes, on obtient un ensemble équivalent du point de vue de la théorie...

Conventions de notation :
- on convient de ne pas toujours noter les parenthèses extérieures ;
- on convient que $\neg$ est prioritaire sur $\wedge$ et $\vee$, c'est-à-dire que la notation $\neg u \wedge v$ signifie implicitement $(\neg u) \wedge v$;
- on convient que $\wedge$ est prioritaire sur $\vee$: $u \wedge v \vee w$ signifie implicitement $(u \wedge v) \vee w$;
- on convient que les symboles $\wedge$ et $\vee$ sont associatifs à gauche :
  $x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n$ signifie $(...((x_1 \wedge x_2) \wedge x_3) \wedge ...) \wedge x_n)$.

2 Sémantique des formules logiques

2.1 Algèbre de Boole

Définition. On appelle algèbre de Boole l'ensemble $\mathscr{B} = \{0, 1\}$ muni de deux lois de composition interne appelées addition et multiplication booléennes dont les tables sont :

$$\begin{array}{c|c|c} add & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{c|c|c} mul & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array}$$

ainis que d'une application souvent notée $x \mapsto \bar{x}$ définie par $0 \mapsto 1$ et $1 \mapsto 0$.

Remarque. Selon les auteurs, les lois sont notées $+$ et $\times$ (mais dans ce cas, il ne faut confondre l'addition booléenne et l'addition classique).

2.2 Évaluation d'une formule

Une formule en tant que telle est une suite de symboles : elle n'a pas de sens en elle-même. Pour lui donner du sens, on doit donner une valeur aux variables et expliquer comment calculer alors une valeur de la formule.

Définition. On appelle valuation (ou affectation ou assignation ou distribution de vérité ou contexte) toute application de $\mathscr{V}$ dans $\mathscr{B}$.

Si v est une assignation, on l'étend par induction structurelle à $\mathscr{F}$ en une application V de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{B}$:

— si $f \in \mathscr{V}$, alors $V(f) = v(f)$
— $V(\bot) = 0$ et $V(\top) = 1$
— si $f = (\neg g)$, alors $V(f) = \overline{V(g)}$
— si $f = (g \wedge h)$, alors $V(f) = V(g) \times V(h)$
— si $f = (g \vee h)$, alors $V(f) = V(g) + V(h)$

$V(f)$ est appelée évaluation de f par v, notée $\mathrm{Val}(f, v)$.

Exemple. Si $f = (\neg x \vee y) \wedge (\neg(x \vee z))$ et si v est l'assignation $x \mapsto 1, y \mapsto 0, z \mapsto 0$, alors

$$\begin{aligned}\mathrm{Val}(f, v) &= V(\neg x \vee y) \times V(\neg(x \vee z)) \\ &= (V(\neg x) + V(y)) \times \overline{V(x \vee z)} \\ &= (\overline{V(x)} + V(y)) \times (\overline{V(x) + V(z)}) \\ &= (\overline{v(x)} + v(y)) \times (\overline{v(x) + v(z)}) \\ &= (\overline{1} + 0) \times (\overline{1 + 0}) = 0\end{aligned}$$

2.3 Tables de vérité

Définition. Pour $f \in \mathscr{F}$, on pose $\mathrm{var}(f)$ l'ensemble des variables qui apparaissent dans f :
— si $f = \top$ ou $f = \bot$, alors $\mathrm{var}(f) = \varnothing$
— si $f \in \mathscr{V}$, alors $\mathrm{var}(f) = \{f\}$
— si $f = (\neg g)$, alors $\mathrm{var}(f) = \mathrm{var}(g)$
— si $f = (g \wedge h)$ ou $f = (g \vee h)$, alors $\mathrm{var}(f) = \mathrm{var}(g) \cup \mathrm{var}(h)$

Proposition 1 *La valeur d'une formule sous une certaine valuation ne dépend que des valuations de ses variables : la valuation d'une variable qui n'apparaît pas dans la formule n'a pas d'importance.*
(démonstration en appendice)

Conséquence :
pour connaître $\mathrm{Val}(f, v)$, il suffit de ne connaître que les valeurs de l'assignation v sur les variables de f,
autrement dit, si $\mathrm{var}(f) = \{x_1, ..., x_n\}$, on peut se contenter de préciser $v(x_i)$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$,
comme on a deux choix pour chaque $v(x_i)$, il y a donc 2^n possibilités pour $\mathrm{Val}(f, v)$
On peut donc connaître toutes les valeurs possibles de $\mathrm{Val}(f, v)$ en dressant la table de vérité de f : chaque ligne correspond aux valeurs de v sur les variables $x_1, ..., x_n$, c'est-à-dire à une assignation (en fait, un sous-ensemble d'assignations qui coïncident sur $\{x_1, ..., x_n\}$).
Exemple. Pour la formule $f = (\neg x \vee y) \wedge (\neg(x \vee z))$, on a la table de vérité suivante

x	y	z	$\neg x$	$\neg x \vee y$	$x \vee z$	$\neg(x \vee z)$	f
0	0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	1	0	0

2.4 Satisfiabilité

Définition. Une formule f est dite satisfiable si et seulement si il existe une assignation v telle que $\mathrm{Val}(f, v) = 1$.
f est appelée une tautologie si et seulement si pour toute assignation v, $\mathrm{Val}(f, v) = 1$.
f est appelée une contradiction si et seulement si pour toute assignation v, $\mathrm{Val}(f, v) = 0$.
On montre de manière évidente que f est une contradiction si et seulement si $\neg f$ est une tautologie.

2.5 Formules équivalentes

Définition. Soit f et g deux formules. On dit f et g sont équivalentes (ou logiquement équivalentes) si et seulement si pour toute assignation v, on a $\mathrm{Val}(f, v) = \mathrm{Val}(g, v)$.
On note alors dans ce cas $f \equiv g$.

Clairement, $\equiv$ est une relation d'équivalence sur $\mathscr{F}$.
Exemples classiques.

cohérence $x \wedge \neg x \equiv \bot$
plus généralement, une formule est une contradiction si et seulement si elle est équivalente à $\bot$

complétude $x \vee \neg x \equiv \top$
plus généralement, une formule est une tautologie si et seulement si elle est équivalente à $\top$

idempotence : $x \equiv (x \wedge x) \equiv (x \vee x)$

absorption : $x \wedge (x \vee y) \equiv x \equiv x \vee (x \wedge y)$

tiers-exclus : $\neg(\neg x) \equiv x$

commut. : $(x \vee y) \equiv (y \vee x)$
$(x \wedge y) \equiv (y \wedge x)$

associat. : $(x \vee y) \vee z \equiv x \vee (y \vee z)$
$(x \wedge y) \wedge z \equiv x \wedge (y \wedge z)$

distribut. : $x \wedge (a \vee b) \equiv (x \wedge a) \vee (x \wedge b)$
$x \vee (a \wedge b) \equiv (x \vee a) \wedge (x \vee b)$

de Morgan : $\neg(x \wedge y) \equiv (\neg x) \vee (\neg y)$
$\neg(x \vee y) \equiv (\neg x) \wedge (\neg y)$

Si x et y sont deux variables, on pose
- $(x \Rightarrow y) = ((\neg x) \vee y)$ (implication)
- $(x \Leftrightarrow y) = ((x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x))$ (équivalence)
- $(x \oplus y) = (\neg x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y)$ (ou exclusif)

Remarque. si dès la construction de $\mathscr{F}$, on se donne ces trois symboles et qu'on définit leurs évaluations correctement pour que les égalités précédentes soient des équivalences, alors on obtient deux ensembles de formules différents, mais en bijection, de sorte que deux formules en bijection ont la même table de vérité ;

autrement dit, on ne change pas la théorie modulo l'équivalence, et c'est tout ce qui nous intéresse.

L'équivalence des formules, utilisée conjointement avec les quelques exemples classiques précédents, permet d'effectuer des calculs dans l'ensemble des formules, sans changer la signification logique de la formule.
Exemple.

$$\begin{aligned}(x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y) &\equiv x \wedge (y \vee (\neg y)) \quad \text{(distributivité)}\\ &\equiv x \wedge \top \\ &\equiv x\end{aligned}$$

2.6 Substitution de formules

Définition. Soit f une formule et n variables distinctes $x_1, ..., x_n$. Soit $g_1, ..., g_n$ n formules.
On note $f|_{x_1=g_1,...,x_n=g_n}$ la formule obtenue en substituant chaque occurence de x_1 dans f par g_1, ... , de x_n par g_n.
Plus formellement, on définit $f|_{x_1=g_1,...,x_n=g_n}$ par induction structurelle :
- si $f = x \in \mathscr{V}$, alors
  - s'il existe un indice i tel que $x = x_i$, on pose $f|_{x_1=g_1,...,x_n=g_n} = g_i$,
  - sinon on pose $f|_{x_1=g_1,...,x_n=g_n} = x$
- si $f = \top$ ou $f = \bot$, alors $f|_{x_1=g_1,...,x_n=g_n} = f$
- si $f = \neg g$, alors $f|_{x_1=g_1,...,x_n=g_n} = \neg(g|_{x_1=g_1,...,x_n=g_n})$

— si $f = g \vee h$, alors $f|_{x_1=g_1,\dots,x_n=g_n} = g|_{x_1=g_1,\dots,x_n=g_n} \vee h|_{x_1=g_1,\dots,x_n=g_n}$
— et de même si $f = g \wedge h$

Proposition 2 *Équivalence après substitution :*

Soit f_1, f_2 deux formules et $x_1, ..., x_n$ n variables distinctes, $g_1, ..., g_n$ n formules.
Alors si $f_1 \equiv f_2$, on a $f_1|_{x_1=g_1,\dots,x_n=g_n} \equiv f_2|_{x_1=g_1,\dots,x_n=g_n}$
(démonstration en appendice)

Application :
on peut donc faire du calcul propositionnel sur les formules « abstraites »comme sur les formules « concrètes ».
Par exemple, pour toute formule f, on a $f \wedge (\neg f) \equiv \bot$, $f \vee (\neg f) \equiv \top$, et plus généralement, toutes les propriétés classiques de calcul propositionnel démontrées grâce à des variables restent valables avec des formules.
Exemple. Avec $f = (p \wedge q) \Rightarrow (r \vee (\neg p \wedge q))$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
f &\equiv \neg(p \wedge q) \vee (r \vee (\neg p \wedge q)) \\
&\equiv (\neg p \vee \neg q \vee r) \vee (\neg p \wedge q) \\
&\equiv (\neg p \vee \neg q \vee r \vee \neg p) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r \vee q) \\
&\equiv (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \top \vee r) \\
&\equiv (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge \top \\
&\equiv \neg p \vee \neg q \vee r
\end{aligned}$$

Preuves

Preuve de la proposition 1

Soit v, v' deux assignations et f une formule telles que $v|_{\mathrm{var}(f)} = v'|_{\mathrm{var}(f)}$, alors $\mathrm{Val}(f, v) = \mathrm{Val}(f, v')$.

Démonstration. Par induction :

- Si $f = \top$ ou $f = \bot$, alors $\mathrm{Val}(f, v) = \mathrm{Val}(f, v')$ par définition
- Si $f = x \in \mathscr{V}$, alors $\mathrm{var}(f) = \{x\}$
  L'hypothèse donne $v|_{\{x\}} = v'|_{\{x\}}$, donc $v(x) = v'(x)$ donc $\mathrm{Val}(f, v) = \mathrm{Val}(f, v')$
- Si $f = (\neg g)$ et si la proposition est vraie sur la formule g, alors soit v, v' deux assignations qui coïncident sur $\mathrm{var}(f)$,
  par définition, $\mathrm{var}(g) = \mathrm{var}(f)$, donc par hypothèse d'induction, on a $\mathrm{Val}(g, v) = \mathrm{Val}(g, v')$,
  donc $\mathrm{Val}(f, v) = \overline{\mathrm{Val}(g, v)} = \overline{\mathrm{Val}(g, v')} = \mathrm{Val}(f, v')$.
- Si $f = (g \wedge h)$ et si la proposition est vraie sur les formules g et h, alors soit v, v' deux assignations qui coïncident sur $\mathrm{var}(f)$,
  par définition, $\mathrm{var}(f) = \mathrm{var}(g) \cup \mathrm{var}(h)$, donc v, v' coïncident sur $\mathrm{var}(g)$ et $\mathrm{var}(h)$, donc par hypothèse d'induction, on a $\mathrm{Val}(g, v) = \mathrm{Val}(g, v')$ et $\mathrm{Val}(h, v) = \mathrm{Val}(h, v')$,
  donc $\mathrm{Val}(f, v) = \mathrm{Val}(g, v) \times \mathrm{Val}(h, v) = \mathrm{Val}(g, v') \times \mathrm{Val}(h, v') = \mathrm{Val}(f, v')$.
- Et de même si $f = (g \vee h)$.

D'après le principe d'induction, la proposition est donc vraie sur toute formule. •

Preuve de la proposition 2

Soit f_1, f_2 deux formules et $x_1, ..., x_n$ n variables distinctes, $g_1, ..., g_n$ n formules.

Alors si $f_1 \equiv f_2$, on a $f_1|_{x_1=g_1,...,x_n=g_n} \equiv f_2|_{x_1=g_1,...,x_n=g_n}$

Démonstration. À toute assignation v, on associe l'assignation $\widetilde{v}$ définie par :

- si $x \notin \{x_1, ..., x_n\}$, alors $\widetilde{v}(x) = v(x)$
- si $x = x_i$, alors $\widetilde{v}(x_i) = \mathrm{Val}(g_i, v)$

On note $\widetilde{f} = f|_{x_1=g_1,...,x_n=g_n}$.

Alors on montre par induction que $\mathrm{Val}(\widetilde{f}, v) = \mathrm{Val}(f, \widetilde{v})$:

- si $f = \top$ ou $f = \bot$, $\widetilde{f} = f$ et la valeur de f ne dépend pas de la valuation, donc la proposition est vraie
- si $f = x \in \mathscr{V}$, alors il y a deux sous-cas :
  - si $x = x_i$, alors $\widetilde{f} = g_i$ donc $\mathrm{Val}(\widetilde{f}, v) = \mathrm{Val}(g_i, v) = \widetilde{v}(x_i) = \mathrm{Val}(x_i, \widetilde{v}) = \mathrm{Val}(f, \widetilde{v})$
  - sinon, $\widetilde{f} = x$ donc $\mathrm{Val}(\widetilde{f}, v) = \mathrm{Val}(x, v) = v(x) = \widetilde{v}(x) = \mathrm{Val}(x, \widetilde{v}) = \mathrm{Val}(f, \widetilde{v})$
- si $f = (\neg g)$ et si la proposition est vraie sur la formule g, alors $\widetilde{f} = (\neg \widetilde{g})$ donc $\mathrm{Val}(\widetilde{f}, v) = \overline{\mathrm{Val}(\widetilde{g}, v)} = \overline{\mathrm{Val}(g, \widetilde{v})} = \mathrm{Val}(f, \widetilde{v})$
- si $f = (g \wedge h)$ et si la proposition est vraie sur les formules g et h, alors $\widetilde{f} = \widetilde{g} \wedge \widetilde{h}$ donc $\mathrm{Val}(\widetilde{f}, v) = \mathrm{Val}(\widetilde{g}, v) \times \mathrm{Val}(\widetilde{h}, v) = \mathrm{Val}(g, \widetilde{v}) \times \mathrm{Val}(h, \widetilde{v}) = \mathrm{Val}(f, \widetilde{v})$
- de même si $f = (g \vee h)$ et si la proposition est vraie sur les formules g et h, alors elle est vraie sur la formule f.

D'après le principe d'induction structurelle, on a bien le résultat voulu. La preuve du th. de substitution en découle immédiatement.

Si $f_1 \equiv f_2$, alors pour toute assignation v, $\mathrm{Val}(f_1, v) = \mathrm{Val}(f_2, v)$,

donc en particulier $\mathrm{Val}(f_1, \widetilde{v}) = \mathrm{Val}(f_2, \widetilde{v})$

donc $\mathrm{Val}(\widetilde{f_1}, v) = \mathrm{Val}(\widetilde{f_2}, v)$,

ce qui est exactement la définition de $\widetilde{f_1} \equiv \widetilde{f_2}$, ce qu'on voulait montrer. •