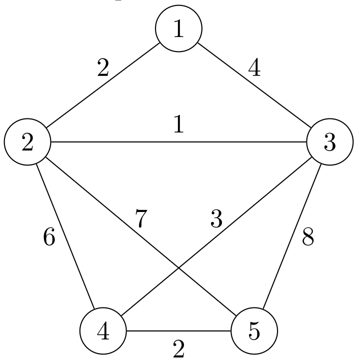
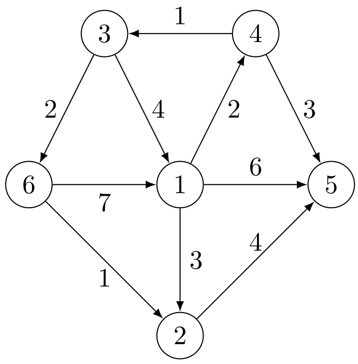
GRAPHES : PLUS COURTS CHEMINS

1) Dijkstra : exemples.

Sur les exemples suivants, mettez en œuvre l'algorithme de Dijkstra :

à partir du sommet 1 | à partir du sommet 3





2) Dijkstra simple

En n'utilisant que des listes pour représenter les ensembles ouvert et fermé et un tableau pour enregistrer les distances, écrivez une version simple de l'algorithme de Dijkstra `dijkstra g s`, qui prend en paramètres un graphe `g` sous forme de tableau de listes d'adjacence et un sommet `s` et qui calcule les plus courtes distances entre le sommet `s` et tous les autres sommets.

En utilisant cette fonction, écrivez une fonction qui donne un plus court chemin entre deux sommets donnés.

3) Dijkstra plus évolué

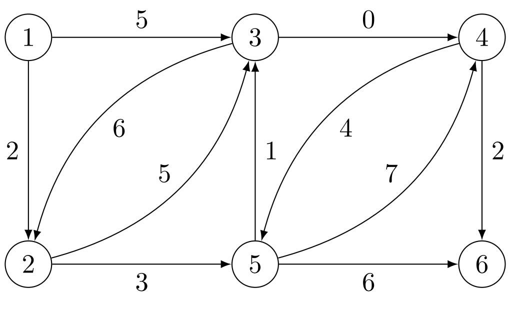
En combinant liste et tableau, améliorez la complexité de votre fonction précédente.

4) Dijkstra optimal

On suppose disposer d'un type tas-min avec ses opérations : `new`, `moveup`, `add`, `take` et `empty`. Modifiez ce type et les fonctions associées pour améliorer encore la complexité : le principal souci est maintenant d'accéder rapidement à n'importe quel élément d'un tas en retrouvant sa position (son indice) dans le tas.

5) Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté valué par des longueurs positives ou nulles sur les arcs. Étant donnés deux sommets s et t de X, un arc est dit vital si sa suppression entraine une augmentation de la longueur du plus court chemin de s à t (on considère que cette longueur est ∞ s'il n'existe pas de chemin). Un arc vital est maximal si sa suppression engendre l'augmentation la plus importante.

a) Considérez le graphe suivant :



(i) Déterminer le plus court chemin du sommet 1 au sommet 6, et sa longueur.

(ii) Existe-t-il un arc vital dans ce graphe ?

b) Pour chacune des assertions suivantes, montrez qu'elle est vraie ou proposez un contre-exemple dans le cas contraire :

(i) Un arc de longueur minimale est vital.

(ii) Un arc qui appartient à un plus court chemin allant de s à t est vital.

(iii) Un arc vital appartient à tous les plus courts chemins allant de s à t.

(iv) Un graphe contient nécessairement un arc vital.

c) Proposez une démarche pour déterminer un arc vital maximal. Appliquez la démarche sur le graphe précédent et déterminez l'arc vital maximal entre 1 et 6 (sans réappliquer à chaque fois l'algorithme de plus court chemin). Évaluez la complexité de l'algorithme.