POLYNÔMES

On représente un polynôme par la liste de ses coefficients, rangés dans l'ordre croissant des degrés. Par exemple, le polynôme $X^3 + 2X - 1$ est représenté par la liste [−1; 2; 0; 1]. Le polynôme nul est représenté par la liste vide.

Une telle liste est dite propre quand son dernier terme est non nul ou quand elle est vide. Un polynôme a une et une seule représentation par une liste propre, mais a une infinité de représentations impropres : la liste [1;0;2;3;0;0] représente aussi le polynôme $1 + 2X^2 + 3X^3$.

Dans tout ce sujet, on ne considèrera que des polynômes à coefficients **entiers**.

Toutes vos fonctions doivent être récursives.

1 Opérations usuelles

1) Écrivez une fonction `eval p x`, de paramètres une liste `p` représentant un polynôme p et un entier `x`, qui calcule l'évaluation $p(x)$ en x du polynôme p.

2) Écrivez une fonction `prod_scal z p`, de paramètres `z` un entier et `p` une liste représentant un polynôme p, qui calcule la liste associée au produit $z.p$.

3) Écrivez une fonction `somme p q` qui calcule une liste représentant le polynôme $p + q$.

4) Écrivez une fonction `produit p q` qui calcule une liste représentant le produit des polynômes $p \times q$.

5) Écrivez une fonction `puissance p k` qui calcule une liste représentant le polynôme p^k.

6) Écrivez une fonction `compose p q` qui calcule une liste représentant le polynôme $p \circ q = p(q)$.

7) Les fonctions précédentes peuvent peut-être construire des représentations impropres. Écrivez une fonction qui construit la représentation propre d'un polynôme. Vous pourrez vous servir de la fonction prédéfinie `rev` qui construit la liste miroir d'une liste : `rev [1;5;4] = [4;5;1]`.

2 Division euclidienne

Soit a,b deux polynômes, b unitaire ($i.e$ son coefficient dominant est 1) : dans ce cas, on montre que le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b sont aussi à coefficients entiers. On supposera donc toujours implicitement que b est unitaire.

8) Écrivez une fonction `coeff_dom p`, qui calcule le coefficient dominant du polynôme p.

9) On veut écrire un algorithme récursif qui calcule q, r tels que $a = bq + r$ et $\deg r < \deg b$. À quelle condition simple sur les degrés q et r sont-ils déterminables sans calcul ?

10) On écrit $a = \alpha + Xc$ où α est un entier et c un polynôme et on suppose qu'on sait calculer le quotient et le reste q_1, r_1 de la division euclidienne de c par b.

a) Montrez que si $\deg r_1$ est assez petit, le reste r de la division euclidienne de a par b est $Xr_1 + \alpha$.

b) Dans le cas contraire, montrez qu'il existe un entier β tel que $r = Xr_1 - \beta b + \alpha$.

11) Écrivez une fonction `diveucl a b`, qui calcule le couple (q, r).

Remarque : en fait, votre fonction peut aussi fonctionner à condition que le coefficient dominant de b divise tous les coefficients de a.

3 Pgcd

12) Écrivez une fonction `pgcd a b` de paramètres a, b deux polynômes, qui calcule **un** pgcd de a et b.

On rappelle que les calculs doivent être faits avec des entiers et uniquement avec des entiers !

13) Améliorez votre algorithme pour qu'il donne en plus des solutions à l'équation de Bezout $au + bv = d$ où d est un pgcd de a et b.