GRAPHES

1 Graphe orienté

1.1 Définitions

Un graphe orienté G est un couple $G = (S, A)$ où

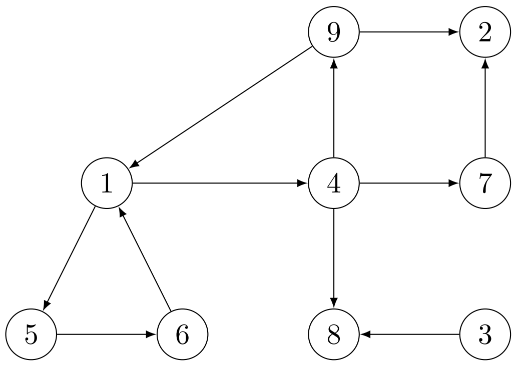
— S est un ensemble fini ;

— A est une partie de $S \times S$ tel que ses éléments (x, y) vérifient $x \neq y$.

S est l'ensemble des sommets ou nœuds du graphe et A est l'ensemble des arcs. Un arc est un couple (x, y) tel que $x \neq y$: x est appelé l'origine de l'arc, y la destination ou le but de l'arc, et x et y sont les extrémités de l'arc.

Le cardinal de S est appelé l'ordre du graphe. Dans toute la suite, n est le nombre de sommets et m le nombre d'arcs.

On représente un graphe par un ensemble de points reliés par des flèches.



Représentation du graphe $G_1 = (S_1, A_1)$ où $S_1 = \{1, \dots, 9\}$ et
$A_1 = \{(9, 1); (9, 2); (1, 4); (1, 5); (3, 8); (4, 9); (4, 7); (4, 8); (5, 6); (6, 1); (7, 2)\}$

Remarque. À tout arbre, on peut associer un graphe, dont les sommets sont les sommets de l'arbre et les arcs sont les couples (a, b) tels que b soit un fils de a.

Exemples

a) carte des rues d'une ville ;

b) liens hypertextes dans les pages web ;

c) échanges monétaires ;

d) réseau de distribution d'eau ;

e) ordonnancement de tâches.

1.2 Degrés d'un sommet

Dans un graphe orienté $G = (S, A)$, si (x, y) est un arc du graphe, y est dit successeur de x et x prédécesseur de y.

Si x est un sommet, on appelle (demi-)degré sortant de x le nombre de successeurs de x :

$$\deg_s(x) = \deg_+(x) = \operatorname{card}\{y \in S \ / \ (x, y) \in A\}$$

On définit de même le (demi-)degré entrant de x comme le nombre de prédécesseurs :

$$\deg_e(x) = \deg_-(x) = \operatorname{card}\{y \in S \ / \ (y, x) \in A\}$$

Enfin, on appelle degré du sommet x la somme des degrés sortant et entrant de x : $\deg(x) = \deg_s(x) + \deg_e(x)$.

Proposition 1 *Dans un graphe orienté ayant m arcs, la somme des degrés sortant des sommets est égale à m, ainsi que la somme des degrés entrants. La somme des degrés des sommets est donc égale à $2m$.*

Remarque. La notion de graphe présentée ici est celle de graphe simple : pas de boucle (arc ayant les mêmes extrémités), pas d'arcs multiples. Dans le cadre du programme, les graphes sont toujours supposé simples.

1.3 Chemins dans un graphe orienté

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté. Un chemin dans G est une suite finie de sommets $(x_0, \ldots, x_p)$ tels que pour tout $i \in \{0, \ldots, p-1\}$, (x_i, x_{i+1}) est un arc du graphe. x_0 est l'origine du chemin, x_p le but, et p est la longueur du chemin (le nombre d'arcs parcourus pour aller de l'origine au but).

Un cycle ou circuit dans G est un chemin dont l'origine et le but sont égaux.

Un chemin $(x_0, \ldots, x_p)$ qui n'est pas un cycle est dit élémentaire si tous les sommets $x_0, \ldots, x_p$ sont distincts. Un cycle $(x_0, \ldots, x_{p-1}, x_0)$ est dit élémentaire si tous les sommets $x_0, \ldots, x_{p-1}$ sont distincts.

Enfin, on appelle distance entre deux sommets x et y la plus petite longueur d'un chemin reliant x à y, s'il en existe. Dans le cas où il n'y a aucun chemin reliant x à y, on dit par convention que la distance entre x et y est infinie.

Proposition 2 *Un plus court chemin entre deux sommets dans un graphe orienté est nécessairement élémentaire.*

S'il existe un chemin entre deux sommets, alors il existe un chemin élémentaire entre ces deux sommets.

Dans un graphe d'ordre n, tout chemin élémentaire (non cyclique) est de longueur au plus égale à $n-1$, un cycle élémentaire est au plus de longueur n.

2 Graphe non orienté

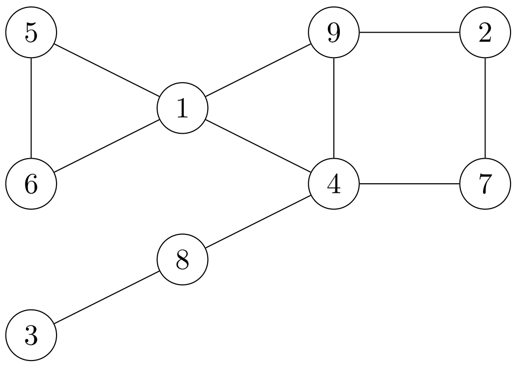
2.1 Définitions

Un graphe non orienté G est un couple $G = (S, A)$ où
- S est un ensemble fini ;
- A est un ensemble de paires $\{x, y\}$ de sommets (donc distincts).

S est encore appelé l'ensemble des sommets ou nœuds du graphe et A est l'ensemble des arêtes. Une arête est une paire $\{x, y\}$ (donc tel que $x \neq y$) : x et y sont les extrémités de l'arête.

On définit de même l'ordre d'un graphe comme étant le nombre de ses sommets.

On représente un graphe non orienté par un ensemble de points reliés par des traits.



Représentation du graphe $G_2 = (S_2, A_2)$ où $S_2 = \{1, \ldots, 9\}$ et
$A_2 = \big\{\{9,1\}; \{9,2\}; \{1,4\}; \{1,5\}; \{3,8\}; \{4,9\}; \{4,7\}; \{4,8\}; \{5,6\}; \{6,1\}; \{7,2\}\big\}$

Exemples

a) réseau de routage internet ;

b) réseau électrique ;

c) réseaux sociaux.

Remarque. À tout graphe orienté, on peut associer un graphe non orienté, obtenu en remplaçant les flèches par des traits (*i.e.* les couples par des paires) : on l'appelle le graphe non orienté sous-jacent.

Proposition 3 *Pour tout graphe d'ordre n ayant m arcs, on a l'inégalité $0 \leqslant m \leqslant \dfrac{n(n-1)}{2}$.*

Si $m = 0$, alors le graphe est dit totalement déconnecté (ensemble de points isolés).

Si $m = \dfrac{n(n-1)}{2}$, alors le graphe est dit complet ; à bijection près, il n'existe qu'un seul graphe complet d'ordre n, on le note K_n. Dans un tel graphe, tous les sommets sont deux à deux reliés par une arête.

2.2 Degré d'un sommet

Dans un graphe non orienté $G = (S, A)$, un sommet y est dit adjacent ou voisin de x si $\{x, y\}$ est une arête du graphe.
On appelle degré du sommet x le nombre de voisins de x (on ne fait plus de distinction entre entrants et sortants).

Proposition 4 *Dans un graphe non orienté ayant m arcs, la somme des degrés des sommets est égale à $2m$.*

Cas particulier : dans un graphe complet d'ordre n, tous les sommets sont de degré $n - 1$ (et réciproquement).

2.3 Chemins dans un graphe non orienté

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté. Une chaîne ou chemin dans G est une suite finie de sommets $(x_0, \dots, x_p)$ tels que pour tout $i \in \{0, \dots, p-1\}$, $\{x_i, x_{i+1}\}$ est une arête du graphe. x_0 est l'origine du chemin, x_p le but, et p est la longueur du chemin (le nombre d'arêtes parcourues pour aller de l'origine au but).
On retrouve les mêmes définitions de cycle, chemin élémentaire et distance et les mêmes résultats.

3 Représentation informatique

3.1 Matrice d'adjacence

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté dont on numérote les sommets de 1 à n. On appelle matrice d'adjacence du graphe la matrice $M = (m_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si l'arc } (i,j) \text{ existe dans } A \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

La matrice d'adjacence du graphe G_1 est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour un graphe non orienté, on a la même définition en remplaçant arc par arête. Par conséquent la matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est symétrique.
Cette représentation a des avantages : l'accès aux informations sur la structure du graphe est de complexité constante, les calculs sur les matrice peuvent être interprétés comme des propriétés du graphe, ajouter ou supprimer des arêtes est de complexité constante. En revanche, pour un graphe « creux »(rapport m/n petit), la matrice contient beaucoup de zéros inutiles et l'ajout ou la suppression de sommets est coûteuse.

3.2 Listes d'adjacence

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté dont on numérote les sommets de 1 à n. On représente le graphe par une liste L (ou un tableau) de listes :
pour chaque sommet i, $L[i]$ est la liste des successeurs de i.
Les listes d'adjacence du graphe G_1 sont

$$\big[[4,5]; []; [8]; [7,8,9]; [6]; [1]; [2]; []; [1,2]\big]$$

Pour un graphe non orienté, on fait de même avec les voisins des sommets.
L'avantage d'une telle représentation est que l'accès aux successeurs ou voisins est immédiat et qu'elle prend en général moins de place en mémoire, l'ajout d'une arête est immédiat. En revanche, supprimer une arête est plus long, ainsi qu'ajouter / supprimer de sommets.