Faidherbe – TP3 Info Spé 2008/2009 – T. Bourdeaud'huy
Types de données récursifs /3 : arbres binaires équilibrés (version caml)

Objectif : Nous nous intéressons dans ce TP aux arbres binaires de recherche équilibrés. Même si *en moyenne*, le temps d'accès à un nœud dans un arbre est en $O(\log_2(n))$, il existe des cas *défavorables* - considérer par exemple des insertions successives de valeurs dans l'ordre - dans lesquels la structure d'arbre *dégénère* pour devenir une structure proche de la liste chainée, dont les coûts de recherche sont en O(n).

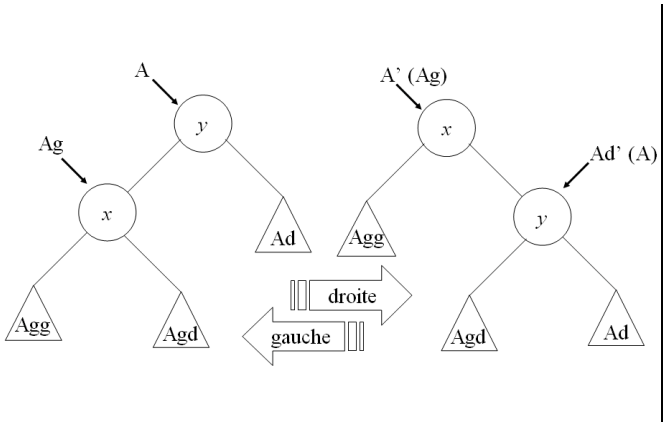
De manière à garantir l'équilibrage de l'arbre binaire, plusieurs types d'arbres et les procédures d'insertion associées ont été proposées. Nous nous intéressons ici aux arbres AVL proposés par Adelson-Velskii et Landis en 1962. Il s'agit d'ABR tels que la différence entre les hauteurs du sous-arbre gauche et du sous-arbre droit de tout nœud ne peut excéder 1. Chaque nœud est annoté par un champ *hauteur* qui dénote la hauteur du sous-arbre. L'insertion doit maintenir l'équilibre entre les hauteurs des sous-arbres gauches et droit : on utilise pour cela des *rotations*.

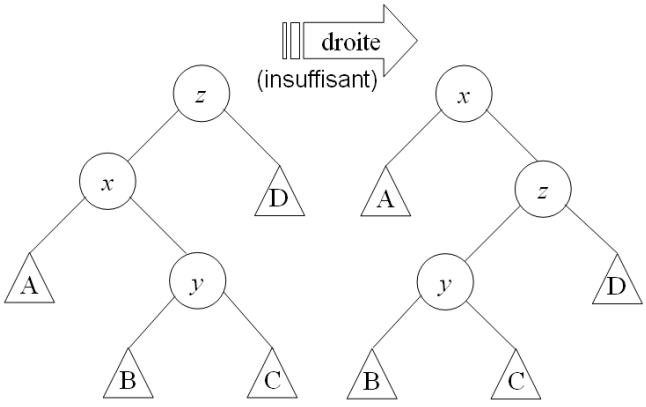
Considérons par exemple que l'arbre soit déséquilibré à gauche, c'est-à-dire que $h(Ag) > 1 + h(Ad)$.

- Supposons que $h(Agg) > h(Agd)$ (Figure ci-dessous à gauche).
  Par hypothèse : $h(Agg) \geq 1 + \max(h(Agd) , h(Ad))$.

On a alors : $h(Ag) = 1 + \max(h(Agg), h(Agd)) = 1 + h(Agg)$
$h(A) = 1 + \max(h(Ad) , h(Ag)) = 1 + h(Ag) = 2 + h(Agg)$
Et après rotation droite : $h(Ad') = 1 + \max(h(Agd) , h(Ad))$
$h(A') = 1 + \max(h(Agg), 1 + \max(h(Agd) , h(Ad)) = 1 + h(Agg)$

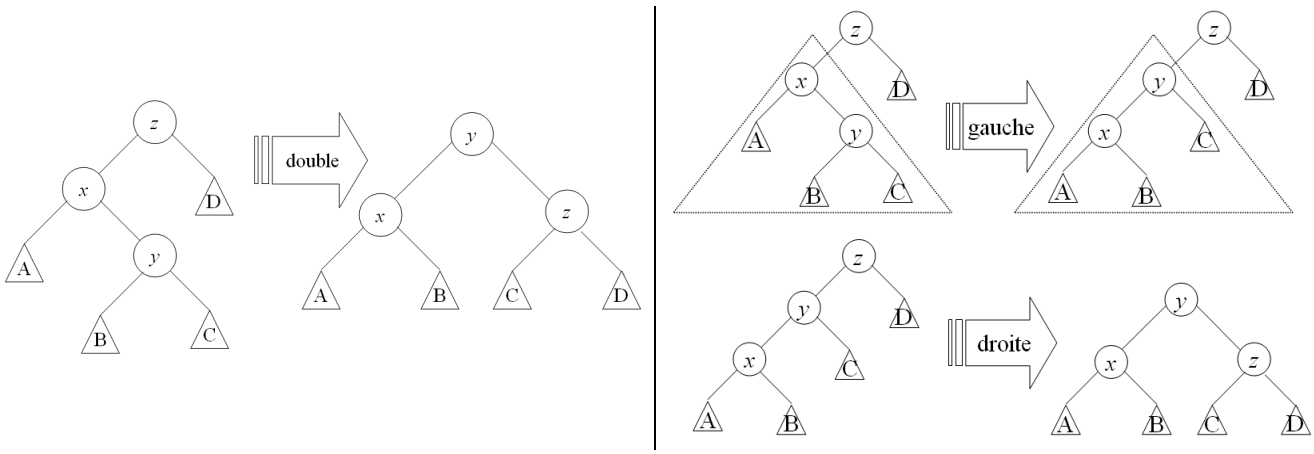
Le déséquilibre est donc réduit d'une unité après une rotation droite.





- Cependant, une rotation droite est insuffisante si $h(Agd) > h(Agg)$ (Fig. ci-dessus à droite). Puisque la hauteur du sous-arbre implanté en y n'a pas diminué, le déséquilibre a juste été déplacé du sous-arbre gauche au sous-arbre droit.

Il est donc parfois nécessaire de procéder à des *rotations doubles*, qui reviennent à utiliser successivement une rotation gauche puis une rotation droite.



Le cas h(Agd) = h(Agg) n'est pas possible dans le contexte de l'utilisation des rotations pour rééquilibrer un arbre qui était équilibré avant l'ajout du dernier élément inséré. A expliquer !

Définition du type de données à manipuler

Pour changer, nous utilisons des n-uplets à la place des enregistrements utilisés pour les arbres ABR. La définition du type AVL est alors :

```
type 'a avl = Vide | Noeud of 'a avl * 'a * 'a avl * int ;;
```

Cette présentation utilise la notation « positionnelle » des arguments sans avoir à les nommer et facilite le *pattern-matching*. Par exemple, le filtre **`match n with Noeud (g,c,d,_)`** permet de récupérer certaines caractéristiques d'un nœud de l'arbre en leur donnant un nom temporaire. Le style de programmation *fonctionnel* (dans lequel les fonctions ne produisent pas *d'effets de bord* mais renvoient à chaque fois la totalité de l'arbre) est alors très rapide et élégant.

Implémentation des fonctions de traitement des arbres AVL

Implémenter les fonctions suivantes de manipulation des arbres AVL, en utilisant un style fonctionnel :

hauteur : 'a avl -> int **fils_gauche : 'a avl -> 'a avl** **fils_droit : 'a avl -> 'a avl**	Fonctions d'accès, utiles pour remplacer certains pattern-matchings répétitifs
insererABR : 'a -> 'a avl -> 'a avl	Insère une nouvelle clé dans un arbre ABR, en mettant à jour les hauteurs le long de la branche concernée
affiche : 'a avl -> unit	Affichage pseudo-graphique avec hauteurs des noeuds
rotationG : 'a avl -> 'a avl	Effectuer une rotation gauche, mettre à jour les hauteurs et renvoyer la racine
rotationD : 'a avl -> 'a avl	Effectuer une rotation droite, mettre à jour les hauteurs et renvoyer la racine
rotationGD : 'a avl -> 'a avl **rotationDG : 'a avl -> 'a avl**	Rotations doubles
equilibrer : 'a avl –> 'a avl	Equilibre un arbre à partir du nœud passé en paramètre, renvoie la nouvelle racine

insererAVL : ‘a -> ‘a avl -> ‘a avl	Insère une nouvelle clé dans un arbre AVL, rééquilibre l’arbre et recalcule les hauteurs des noeuds